INGRESO
UNER 2019

CURSO DE AMBIENTACIÓN A LA VIDA UNIVERSITARIA

Matemática

| Cuadernillo para Ingresantes |

Universidad Nacional de Entre Ríos

INDICE

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES Y SUS SUBCONJUNTOS

1. Los números enteros

Desde épocas remotas, el hombre debió satisfacer su necesidad de contar objetos, personas, animales. Para hacerlo, por intuición comenzó a usar los números que llamamos naturales: $1, 2, 3, 4, \ldots$, asociados al concepto de cantidad.

El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos. El primer elemento es el uno, la unidad $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

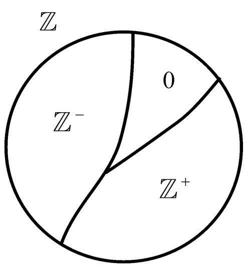
En ese conjunto se definen dos operaciones elementales: la adición y la multiplicación y se establecen las propiedades que para ellas se cumplen. La suma de dos números naturales cualesquiera es otro número natural y el producto entre dos números es también otro número natural. Se definen también, con ciertas limitaciones, las operaciones inversas: la sustracción y la división respectivamente. En el caso de la sustracción, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo; en el de la división, el dividendo debe ser múltiplo del divisor.

En N, la diferencia entre dos números a y b es el número c si y sólo si $c + b = a$. Para que esa operación sea posible, a debe ser mayor que b. Las operaciones $3-3$, $3-7$ no pueden efectuarse.

El cociente entre dos números a y b es otro número c si y sólo si $c \cdot b = a$. El cociente $15:7$ no puede efectuarse porque no existe ningún número natural que multiplicado por 7 de por resultado 15.

Como una extensión del conjunto de los naturales se crearon los **números enteros.** En el nuevo conjunto la diferencia entre dos números es siempre posible. Por ejemplo: $3-3=0$; $3-7=-4$.

La unión entre el conjunto de los enteros positivos, el conjunto que tiene como elemento al cero y el de los enteros negativos es, precisamente, el conjunto de los enteros Z. El cero es el elemento neutro para la suma: $a+0=a$ para todo a perteneciente a Z. Los números negativos son los “inversos aditivos”, u opuestos de los positivos: -10 es el opuesto de 10 pues $10+(-10)=0$.



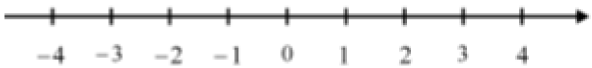
Al conjunto de los enteros positivos con el cero se los denomina conjunto de los enteros no negativos y se llama conjunto de los enteros no positivos al conjunto de los enteros negativos con el cero:

Conjunto de enteros no negativos $=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto de enteros no positivos $=\{\ldots, -10, -9, -8, \ldots, -2, -1, 0\}$

$$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Representamos los enteros en la recta numérica:



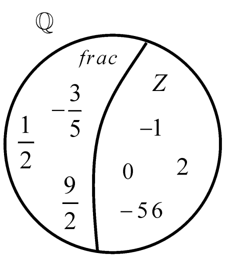
2. Los números racionales

Las fracciones se crearon para expresar partes más pequeñas que la unidad, por ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$.

La fracción $\frac{a}{b}$ significa que la unidad se dividió en b partes y se tomaron a. El numerador es a, b el denominador y éste no puede ser cero.

Los números que pueden escribirse como cociente de dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, se llaman números racionales.

EJEMPLOS $\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$ $\quad 2:3=\frac{2}{3}$ $\quad -8:24=-\frac{1}{3}$



Si el numerador es menor que el denominador, la fracción se dice propia; si el denominador es menor que el numerador, impropia, y si el numerador es múltiplo del denominador el número racional es entero.

Los números racionales pueden escribirse en forma decimal.

Consideremos los números racionales: $\frac{3}{5}=0{,}6$; $\frac{43}{8}=5{,}375$; $\frac{13}{20}=0{,}65$.

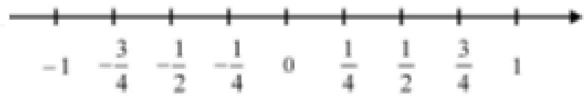
La expresión decimal tiene un número finito de dígitos. En los siguientes ejemplos, luego de la coma decimal, se tienen infinitas cifras pero hay una "parte" que se repite periódicamente:

a) $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ b) $\frac{43}{15}=2{,}8666\ldots$ c) $\frac{29}{225}=0{,}128888\ldots$

El conjunto de los racionales es un "conjunto denso". Esto significa que entre dos números racionales cualesquiera, existe siempre otro número racional:

Entre $\frac{1}{2}$ y 1, el promedio o media aritmética $\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$; entre $\frac{3}{4}$ y 1, el $\frac{7}{8}$.

Los números racionales se representan en la recta numérica:



Un número decimal periódico puede expresarse como fracción, en la forma que explicaremos mediante ejemplos.

a) La expresión n decimal $0{,}252525\ldots$ se dice periódica pura, el período es 25 y se repite a partir de la coma decimal.

Sea $x=0{,}252525\ldots$ multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, $100x=25{,}2525$. Restamos miembro a miembro.

$$\begin{array}{r} 100x=25{,}2525\ldots \\ x=0{,}252525\ldots \\ \hline 99x=25 \end{array}$$

$$x=\frac{25}{99}$$

b) $x=2{,}121121121$ Es periódica pura, de período de tres cifras: 121.

Multiplicamos por 1000:

$$\begin{array}{r} 1000x = 2121{,}121121\ldots \\ x = 2{,}121121\ldots \\ \hline 999x = 2119 \end{array}$$

$$x = \frac{2119}{999} = 2 + \frac{121}{999}$$

c) $x = 3{,}999\ldots$ El período tiene una cifra. Multiplicamos por 10:

$$\begin{array}{r} 10x = 39{,}999\ldots \\ x = 3{,}999\ldots \\ \hline 9x = 36 \end{array}$$

$$x = \frac{36}{9} = 4$$

d) x = 0,2212121…… Es periódica mixta: la parte no periódica tiene una cifra y el período tiene dos cifras.

Multiplicamos por 1000, ambos miembros; también por 10, y luego restamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} 1000x = 221{,}2121\ldots \\ 10x = 2{,}2121\ldots \\ \hline 990x = 219 \end{array}$$

Luego $x = \frac{219}{990} = \frac{73}{330}$

Verifique que $x = 1{,}132444\ldots = 1 + \frac{149}{1125}$.

El pasaje de una expresión decimal periódica, puede hacerse también siguiendo las reglas siguientes:

1) Una expresión decimal periódica pura es igual a la fracción cuyo numerador es el período, y el denominador, el número formado por tantos 9, como cifras tenga el período. (parte entera nula).

2) Una expresión decimal periódica mixta es igual a la fracción cuyo numerador es la parte no periódica seguida del periodo menos la parte no periódica, y cuyo denominador está formado por tantos 9 como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros, como cifras tenga la parte no periódica. (parte entera nula).

Si el período es 9, se suprime toda la parte periódica y se suma uno a la cifra anterior.

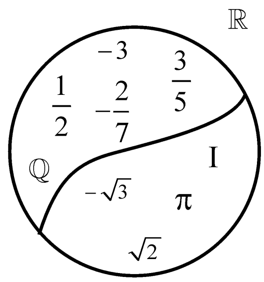
EJEMPLO: $3{,}259999\ldots = 3{,}26$

3. Los números irracionales

Los números cuya representación decimal es indefinida y no periódica no son racionales, no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros, se llaman números irracionales. Los racionales son "conmensurables", los irracionales, no lo son.

Son irracionales $\sqrt{2} = 2{,}41421356\ldots$; el número $\pi = 3{,}14159\ldots$, que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su propio diámetro, $\sqrt[3]{5} = 1{,}709975\ldots$; el número $e = 2{,}718281828459045\ldots$

4. Los números reales

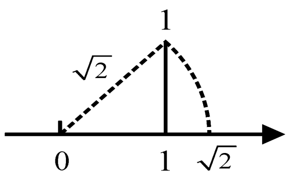


La unión entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales, da por resultado el conjunto de los números reales.

4.1 Representación de los números reales en la recta numérica

Sea el número real $\sqrt{2}$ (irracional). Construimos un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1. Por corolario del Teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

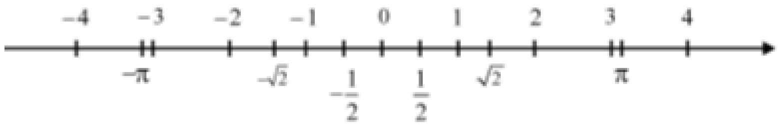
Con esa medida, representamos en la recta el número $\sqrt{2}$.



Ejercicio

Represente en la recta numérica los números: $\sqrt{13}$; $\sqrt{3}$.

(Ayuda: $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$; $3 = 2 + 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$.)



Entre los números reales y los puntos de una recta existe una correspondencia según la cual, a cada número real le corresponde un punto de la recta, y, recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un conjunto denso, porque entre dos números reales cualesquiera existe otro número real.

EJERCICIOS

1) Escriba V o F en ( ), según la proposición sea verdadera o falsa:

   a) Todo número entero es racional. ( )

   b) Entre dos números enteros cualesquiera, existe siempre otro número entero. ( )

   c) El conjunto de los enteros es denso. ( )

   d) El conjunto de los racionales y el de los irracionales son disjuntos. (conjuntos disjuntos son los que no tienen elementos comunes). ( )

2) Exprese como fracciones: a) $0{,}1999\ldots$; b) $3{,}219999\ldots$; c) $10{,}99999\ldots$ Analice los resultados y formule su propia conclusión.

3) Escriba como número decimal y clasifique la expresión que obtenga: a) $\frac{15}{24}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{77}{36}$.

4) Ordene de menor a mayor: 0; -3; -7; 21; -34; 12; 4.

5) Ordene de mayor a menor: 0; 0,25; -1,2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$.

5. El conjunto de los números complejos

En el conjunto de los números reales, una ecuación como la siguiente, no tiene solución: $x^2 + 1 = 0$. Sí queremos "despejar" x, llegamos a: $x^2 = -1$, y no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1. Para dar solución a expresiones como esa, se crearon los números imaginarios. La unidad imaginaria es "i". La unión del conjunto de los reales y el de los imaginarios, da por resultado el de los números complejos. La unidad imaginaria i, es el complejo tal que su cuadrado es igual a -1.

En el conjunto C tienen significado las raíces de índice par de números negativos

$$\sqrt{-1} = i \text{ } pues, por\ definición\ i^2 = -1$$

6. Operaciones con números reales

6.1 Valor absoluto de un número real

DEFINICIÓN

El valor absoluto de un número real x es el número real, que indicamos $|x|$, tal que:

$$|x| = \begin{cases} x, \ si\ x \geq 0 \\ -x, \ si\ x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

a) $|0| = 0$ porque $0 \geq 0$.

b) $|-2{,}4| = -(-2{,}4) = 2{,}4$ porque $-2{,}4 \leq 0$.

c) $|5{,}25| = 5{,}25$ porque............................

6.2. Adición de números reales

PROPIEDADES

Si *a, b* y *c* son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

1. La suma de dos números reales es otro número real: *a + b* es un número real. (ley de cierre)

2. Asociativa: *(a + b) + c = a + (b + c)*

3. Conmutativa: *a + b = b + a*

4. Existencia de elemento neutro: existe el número real 0 (cero) tal que *a + 0 = 0 + a = a*

5. Existencia de elemento opuesto: para todo número real *a* distinto de cero existe *(-a)* tal que *a + (-a) = 0* .

EJEMPLOS

a) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{2.5-3.3}{15}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}$

b) $-\frac{4}{9}+(-12)=-\frac{4}{9}-12=\frac{-4-108}{9}=-\frac{112}{9}=-12\frac{4}{9}$

c) $3\sqrt{2}+4+5\sqrt{2}=4+8\sqrt{2}$

d) 0,3333… - $\frac{4}{5}$ = $\frac{3}{9}-\frac{4}{5}=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5-4.3}{15}=\frac{5-12}{15}=-\frac{7}{15}$

6.3 Diferencia o sustracción de números reales

Es la operación inversa de la suma.

DEFINICIÓN

Dados dos números reales a y b, la diferencia es el número real que se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo: a – b = a + (-b)

EJEMPLO

$$-\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{7}{8}=\frac{-12+7}{8}=-\frac{5}{8}$$

Cuando en una expresión figuran términos encerrados entre paréntesis ( ), corchetes $[\ ]$ o llaves $\{\ \}$, para efectuar las operaciones se quitan previamente esos símbolos teniendo en cuenta que cuando están precedidos por un signo +, se conservan los signos de los términos encerrados; y si están precedidos por un signo negativo, se cambian los signos de todos los términos encerrados. Cuando en una expresión figuran términos agrupados por esos tres símbolos, se los elimina ordenadamente, comenzando por los símbolos que se encuentran en el interior, y, si corresponde, reduciendo los términos semejantes.

EJEMPLO

$$-\frac{2}{5}-\left[\frac{2}{3}-\left(3-\frac{5}{4}\right)+\left(-2+\frac{2}{3}\right)\right]=-\frac{2}{5}-\left[\frac{2}{3}-3+\frac{5}{4}-2+\frac{2}{3}\right]=$$

$$=-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+3-\frac{5}{4}+2-\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+5-\frac{5}{4}=\frac{-24-80+300-75}{60}=\frac{121}{60}=2\frac{1}{60}$$

6.4. Multiplicación de números reales

PROPIEDADES

Si *a, b y c* son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Ley de cierre: el producto de dos números reales es otro número real.

b) Asociativa: *(a .b).c = a.(b .c)*

c) Conmutativa: *a. b = b. a*

d) Existencia de elemento neutro: existe el número real *1*(uno) tal que *a.1=1.a = = a*

e) Existencia de inverso: para todo número real a distinto de cero, existe el inverso $\frac{1}{a}$ tal que $a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$ Al inverso de a se lo expresa también a^{-1}.

f) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: *a (b + c) = a . b + a . c*

REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN

+ x + = +	- x + = -
+ x - = -	- x - = +

EJEMPLOS

a) $\frac{3\cdot(-5)-4\cdot 6}{3\cdot 5+4}$ R: $-\frac{39}{19}$

b) $\frac{12\cdot(-4):6}{4-3\cdot(-5)}$ R: $-\frac{8}{19}$

c) $\frac{42:7+2\cdot(-6)}{4+(-3)\cdot 6-10}$ R: $\frac{1}{4}$

6.5. División de números reales

DEFINICIÓN

Dados dos números reales *a y b,* con *b* distinto de cero, el cociente *a : b* es el número real *c* tal que el producto *c . b = a.*

Para efectuar la división, multiplicamos *a* por el inverso de *b*.

EJEMPLO

$$(-6):\frac{3}{5}=-6\cdot\frac{5}{3}=10$$

6.6. Potenciación

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real positivo, la enésima potencia de *a* es: $a^n = a.a.a.a.....a$ (*n* factores *a*) ; si *n = 1* es $a^1 = a$; si $n=0$ es $a^0 = 1$

a es la base de la potencia, *n* es el exponente. Si la base es negativa y el exponente es un número par, la potencia es positiva; si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.

EJEMPLOS

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27} \qquad (-3)^3=-27 \qquad (-5)^4=625$$

DEFINICIÓN

Si *a* es distinto de cero y *n* es un entero positivo, entonces se define $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ con $a\neq 0$.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si *m* y *n* son números enteros, las siguientes propiedades llamadas *leyes de los exponentes,* se demuestran a partir de las definiciones anteriores:

a) $a^m\, a^n = a^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, si $a\neq 0$

c) $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$

d) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $, si\, b\neq 0$

Explique las propiedades expresadas anteriormente.

EJEMPLOS

a) $(-2\,x)^3\,x^{-5}=(-2)^3\,x^3\,x^{-5}=-8\,x^{3-5}=-8\,x^{-2}=-\dfrac{8}{x^2}$

b) $\left(\dfrac{2}{5}a^2\,b^3\right)^3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 a^6\,b^9=\dfrac{8}{27}a^6\,b^9$

EJERCICIOS

1) Efectúe los cálculos y escriba cada expresión de manera que todos los exponentes sean positivos.

a) $\left(\dfrac{2\,x^3\,y^{-3}}{5\,x^4\,y^{\,2}}\right)^{-1}$ b) $\left(\dfrac{7\,a^4\,b^{-4}}{2\,a^2\,b^2}\right)^{-2}$ c) $\left(\dfrac{3\,x^{-3}\,y^{\,4}}{10\,x^2\,y^6}\right)^{-1}$

RESPUESTAS

a) $\dfrac{5}{2}x\,y^5$ b) $\dfrac{4\,b^{12}}{49\,a^4}$ c) $\dfrac{10}{3}x^5\,y^2$

2) Escriba el valor de *x* que haga verdadera cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3^x\cdot 3^{\,5}=3^8$ $b)\ 2^{-5}\cdot 2^{\,x}=2^9$ $c)\ \dfrac{4^{-3}}{4^x}=4^5$

6.7. Radicación. Potencias de exponentes fraccionarios

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real y *n* es un número entero positivo mayor o igual que 2, la raíz enésima de *a* es el número *x*, tal que $x^n=a$.

$$\sqrt[n]{a}=x\ \ si\ \ y\ \ sólo\ \ si\ \ (x)^n=a$$

Si *a* es positivo, entonces *x* es positivo y se llama *raíz enésima principal de a.*

Si *a* es negativo y *n* es un número par, entonces la raíz enésima no es un número real.

Si *a* es negativo y *n* es un número impar, entonces *x* es negativo.

Si *x =0,* entonces $\sqrt[n]{0}=0$

EJEMPLOS

$\sqrt[3]{-343}=-7 \quad porque\ (-7)^3=-343$ $\qquad \sqrt[3]{8}=2\ porque\ 2^3=8$

$\sqrt{-4}$ *no es un número real porque el índice es* 2, *número par, y el radicando es negativo.*

$\sqrt{25}=5\ \ porque\ 5^2=25$ Observación: Si bien $(-5)^2=25$ se conviene en que la raíz cuadrada de 25 es 5. También se la llama raíz cuadrada principal de 25.

REGLAS PARA LA RADICACIÓN

Si las raíces son números reales, entonces:

a) Para la multiplicación: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

b) Para la división: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad si\ b\neq 0$

c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\,n]{a}$

Enuncie las propiedades expresadas anteriormente.

EJEMPLOS

a) $\sqrt[3]{-2}\ \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{-2^3}=-2$

b) $\sqrt{18x^5y^4}=\sqrt{2.3^2.x^5y^4}=3x^2\,y^2\sqrt{2x}$

c) $c)\ 4\sqrt{90}+3\sqrt{10}-9\sqrt{40}=4\sqrt{2.3^2.5}+3\sqrt{2.5}-9\sqrt{2^3\,5}=$

$=12\sqrt{10}+3\sqrt{10}-18\sqrt{10}=-3\sqrt{10}$

d) Simplifique la expresión: $\sqrt[4]{\dfrac{x^2\,y^2}{81x^8\,y^7}}$

Rta. $\dfrac{1}{3\,x\,y}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2\,y}}$

Potencias de exponentes racionales

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real y *n* es un número entero mayor o igual que 2, entonces $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, siempre que exista $\sqrt[n]{a}$, dado que si *n* es par y *a* es negativo, la expresión $\sqrt[n]{a}$ no existe en el conjunto $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real y *m* y *n* son números enteros primos entre sí (significa que el máximo común divisor es 1) con $n \geq 2$, entonces:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \; siempre \; que \; exista \; \sqrt[n]{a}$$

EJEMPLOS

a) $\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5^3}{2^3}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\left(\frac{5^3}{2^3}\right)}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

b) $\left(\frac{16}{81}\right)^{3/4} + \left(\frac{256}{625}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\left(\frac{2^4}{5^4}\right)} + \sqrt[4]{\frac{2^8}{5^4}} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una expresión fraccionaria en la que figuran radicales en el denominador, se acostumbra escribir una fracción equivalente que no contenga radicales en el denominador. Este proceso se denomina *racionalización de denominadores.* Para obtener una fracción equivalente se multiplica el numerador y el denominador por la misma expresión.

EJEMPLOS

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\,\sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})} = \frac{8-4\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4-3} = 8-4\sqrt{3}$

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $-5+2-[4\cdot(3-5)+3\cdot(4-7)]=$

b) $-2+3\cdot(-6+5)-2\cdot(7-4)=$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-2+\frac{3}{2}\right)+5\cdot\left(\frac{3}{25}-1\right)=$

2) Plantee y halle el resultado:

a) A la suma de -4 más 10, réstele la diferencia entre 9 y -2.

b) Reste 20 a la suma entre 8, -5 y 12.

c) A la suma entre -13 y -4, reste la diferencia entre -8 y el opuesto de -2

3) Efectúe los cálculos:

a) $|-10+3|+|2-4|-|-5|$

b) $|2|+|-5|-|2-5|$

c) $|10-12|-|-6|+|4-7+2|$

d) $|-2|\cdot|7-3|-|-2\cdot(7-3)|$

4) Si a y b son números reales, puede demostrarse que se cumplen las propiedades:

a) $|a+b|\leq|a|+|b|$

b) $|a-b|\geq|a|-|b|$

c) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

Se pide:

a) Exprese con palabras las propiedades simbolizadas.

b) Muestre que se verifican para: $a=-2$ y $b=5$; $a=-12$ y $b=-10$.

5) Si $A=\left\{\pi, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, 20, -16\right\}$ diga cuáles elementos son números enteros; enteros negativos, racionales, irracionales.

6) Efectúe las siguientes operaciones, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

a) $(-2)(4-2a+3x)-(-5)(-9+5a-x)$ R: $-53+29a-11x$

b) $10\cdot(-4x+3y)+(-6)(-x-y+2)$ R: $-34x+36y-12$

c) $(2a-b)(-a+2b)$ R: $-2a^2+5ab-2b^2$

d) $(1-a+b)(1+a-b)$ R: $1-a^2-b^2+2ab$

e) $(-5+a)(-5-a)$ R: $25-a^2$

7) Señale la respuesta correcta: $1+(3a-2)^2=$

a) $-3+9a^2$ ( ) b) $5-3a$ ( ) c) $5-12a+9a^2$ ( )

8) Plantee y efectúe las siguientes operaciones:

a) El cuadrado de la suma entre a y b. R: $a^2+2ab+b^2$

b) El cuadrado de la diferencia entre a y b R: $a^2-2ab+b^2$

c) El cubo de la suma entre a y b. R: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

d) El cubo de la diferencia entre a y b. R: $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

e) El cuadrado de la suma entre a y el cuadrado de b. R: $a^2+2ab^2+b^4=(a+b^2)^2$

f) El cuadrado de la diferencia entre 2 y el cubo de x. R: $4-4x^3+x^6=(2-x^3)^2$

g) El cubo de la diferencia entre el doble de x y el triplo del cuadrado de y. R: $(2x-3y^2)^3=8x^3-36x^2y+54xy^4-27y^6$

9) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$ R: $\frac{9}{5}$

b) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$ R: $\frac{5}{6}$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$ R. $\frac{1}{6}$

d) $\frac{42:7+2\cdot(-6)}{4+(-3)\cdot 6-10}$ R: $\frac{1}{4}$

e) $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2} 2^{3}\cdot 2^{-5}$ R: $\frac{1}{8}$

f) $2x^{2}y^{3}\left(-3xy^{4}\right)$ R: $-6x^{3}y^{7}$

g) $36x^{4}y^{2}:12x^{3}y^{3}$ R: $3xy^{-1}$

h) $3a^{-1}b^{2}:4a^{2}b^{-1}$ R: $\frac{3}{4}a^{-3}b^{3}$

i) $\left(\frac{2}{3}a^{2}b\right)^{3}:\left(\frac{4}{5}a^{3}b^{4}\right)^{2}$ R: $\frac{25}{54}b^{-5}$

j) $2^{1/2}\cdot 2^{-3/2}\cdot 2^{0}$ R: $\frac{1}{2}$

k) $1{,}2\widehat{9}+0{,}7\widehat{3}-2{,}\widehat{5}$ R: $-\frac{47}{90}$

l) $\left(\frac{0{,}125+0{,}45-0{,}075}{0{,}75-0{,}625}\right)^{2}$ R: 16

10) Las sumas que figuran en los ítems a y b del ejercicio 9 se llaman “sumas telescópicas”. Se pide: escriba la suma telescópica de cuatro binomios si 3 es el minuendo del primer binomio y el resultado de la suma es $\frac{20}{3}$. Verifique su respuesta.

11) Exprese como potencia de exponente fraccionario, o como raíz, según corresponda:

a) $\sqrt{b^4}$ R: b^2

b) $(2-x)^{1/2}$ R: $\sqrt{2-x}$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3/5}$ R: $\sqrt[5]{-\frac{27}{64}}$

d) $\sqrt{(a^2-b^2)^3}$ R: $(a^2-b^2)^{3/2}$

e) $\left((1+a^3)^2\right)^{3/2}$ R: $(1+a^3)^3$

f) $x^{3/4}$ R: $\sqrt[4]{x^3}$

12) Efectúe las operaciones:

a) $\sqrt{32}-5\cdot\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\cdot\sqrt{98}$ R: $-20\cdot\sqrt{2}$

b) $5\cdot\sqrt{12}-\sqrt{108}+2\cdot\sqrt{75}-\sqrt{675}$ R: $-\sqrt{3}$

13) Racionalice los denominadores:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2-a}{\sqrt{a}}$ R. $\frac{(2-a)\sqrt{a}}{a}$

c) $\frac{2x}{\sqrt{4x}}$ R. $\sqrt{x}$

d) $\frac{10}{\sqrt{a+b}}$ R: $\frac{10}{a+b}\sqrt{a+b}$

f) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ R: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

g) $\dfrac{5a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ R: $\dfrac{5a}{a-b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

h) $\dfrac{4-x^2}{2+\sqrt{x}}$ R: $\dfrac{4-x^2}{4-x}\left(2-\sqrt{x}\right)$

i) $\dfrac{25-x^2}{\sqrt{5}+\sqrt{x}}$ R: $(5+x)(\sqrt{5}-\sqrt{x})$

14) Señale la expresión correcta: $\sqrt{x}-\sqrt{y}=$

i) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ( ) ii) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ( ) iii) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ( )

15) Racionalice el numerador:

$\dfrac{\sqrt{x}-7}{x-21}$ R. $\dfrac{x-49}{(x-21)(\sqrt{x}+7)}$

16) Racionalice el numerador y simplifique, si es posible:

$\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2-2x+1}$ R. $\dfrac{1}{x-1}$

PROBLEMAS

1) Albert Einstein determinó que si un cuerpo en reposo de masa m_0 viaja a velocidad cercana a la de la luz, su masa aumenta, y si llamamos *m* a la masa aumentada resulta $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ donde *v* es la velocidad del objeto en movimiento y *c* es la velocidad de la luz.

En un acelerador utilizado en un tratamiento terapéutico las partículas viajan a velocidad *v = 0,98 c* (es decir: 0,98 de la velocidad de la luz).

Encuentre la relación entre la masa *m* y la masa en reposo m_0 .

SOLUCIÓN

La velocidad de la luz es *c = 300 000 km/seg.* Como se pide la relación entre las masas y conocemos la relación entre las velocidades simplemente podemos sustituir directamente en la fórmula.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{(0,98\,c)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{(0,98)^2\,c^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(0,98)^2}}$$

$$m \approx \frac{m_0}{\sqrt{1-0,96}} \approx \frac{m_0}{\sqrt{0,04}} \approx \frac{m_0}{0,2} \approx 5\,m_0$$

RESPUESTA

La masa es igual aproximadamente a 5 veces la masa inicial.

2) Se espera que la población *P* de una ciudad (en miles) crezca de acuerdo a $P = \dfrac{221-3t}{15-\sqrt{3t+4}}$, donde el tiempo *t* está medido en años.

a) Simplifique la expresión anterior, racionalizando previamente el denominador.

b) Calcule la población de la ciudad dentro de 4 años.

c) Calcule el tiempo que debe transcurrir para que la población sea al menos de 25 000 habitantes.

3) Un estudio del medio ambiente de una comunidad, sugiere que el nivel promedio diario de smog en el aire será $Q = \dfrac{0,5p + 19,4}{\sqrt{0,5p + 19,4}}$ unidades cuando la población sea p (en miles).

a) Racionalice la expresión de Q .

b) Determine el valor exacto de la expresión anterior cuando la población sea de 9 800 habitantes.

4) Algunas veces los pediatras usan la fórmula $C = \dfrac{S\,A}{\sqrt{3}}$ a fin de calcular una dosis de medicamento apropiada para un niño cuya área superficial es *S* (en m^2) cuando la dosis del adulto es *A* (en mg). A su vez el área corporal de un niño se calcula con la fórmula $S = 0,0072\,W^{0,4}\,H^{0,7}$, donde *W* es el peso del niño (en kg) y *H* su altura (en m).

a) Racionalice la fórmula para calcular *C*.

b) Exprese la fórmula para *S* utilizando radicales.

c) Calcule la dosis para un niño de 91 cm que pesa 18 kg, si para un adulto la dosis es de 250mg (encuentre primeramente el valor exacto y luego el valor aproximado a los milésimos)

5) La relación longitud-peso de una ballena está dada aproximadamente por $W = 0,0016\,L^{2,4}$, donde *W* es el peso en toneladas y *L* su longitud en pies.

Calcule la razón entre los pesos de dos ballenas, si la longitud de una de ellas es el doble de la otra. (Dé el valor exacto, como radical, y el valor aproximado al entero más cercano)

RESPUESTAS

Problema 2

a) $P = 15 + \sqrt{3t + 4}$ b) *P = 19 000* c) 32 años

Problema 3

a) $\sqrt{0,5p + 19,4}$ b) $\sqrt{24,3}$

Problema 4

a) $C = \dfrac{S\,A\sqrt{3}}{3}$; $b)\ 0,0072\,\sqrt[10]{W^4H^7}$; $c)\ 3,091$

$5)\ 4\sqrt[5]{4}\ ;\ 5$

Notación científica

La notación científica es una manera concisa para escribir números muy grandes o muy pequeños. Ejemplos: $5,98\times10^{24}$ kilogramos es la masa aproximada de la tierra; la masa de un protón es $1,67\times10^{-27}$ kilogramos.

Un número positivo está escrito en notación científica si tiene la forma $a\times10^{n}$ donde $1\leq a<10$ y *n* es un número entero.

La conversión de la notación científica a la estándar se efectúa de la siguiente manera:

- Si *n* es positivo, se corre la coma decimal *n lugares* hacia la derecha.
- Si *n* es negativo, se corre la coma decimal *n lugares* hacia la izquierda.

EJEMPLOS

$1,15\times10^{4} = 11500$

$7,025\times10^{-3} = 0,007025$

EJERCICIOS

1) Escribir en notación científica:

a) $(3,54\times10^{-2})(5,273\times10^{6})$

b) $\dfrac{(2,16\times10^{4})(1,256\times10^{-12})}{3,17\times10^{-18}}$

c) $8,56 \text{ x } 10^{9}$

d) $2,25 \text{ x } 10^{-2}$

RESPUESTAS

1) a) $1,87\times10^{5}$ b) $8,56\text{ x}10^{9}$ c) $1,00256\times10^{8}$ d) $2,25\text{ x}10^{-2}$

2) Escribir en notación estándar:

a) $9,108\times10^{-3}$ b) $5,001\times10^{6}$ c) $2,15645\times10^{4}$ d) $7,26\times10^{-2}$

Uso de la calculadora

Al introducir un número en notación científica, por ejemplo $1{,}125\times10^{6}$, aparece en la pantalla 1125000. Al introducir $1{,}125\times10^{15}$, aparece 1.125 seguido de un espacio y luego 15, o también 1.125E15, dependiendo del modelo de calculadora.

Si el exponente es negativo, como en $1{,}125\times10^{-15}$, aparece 1.125 seguido de un espacio y luego -15, o también 1.125E-15.

EJERCICIOS

1) Calcule cada expresión. Escriba la respuesta en notación científica y redondee el resultado usando tres dígitos significativos.

   a) $(3{,}54\times10^{-2})\,(5{,}273\times10^{6})$ R: $1{,}87\times10^{5}$

   b) $\dfrac{(2{,}16\times10^{4})(1{,}256\times10^{-12})}{3{,}17\times10^{-18}}$ R: $8{,}56\times10^{6}$

2) La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente de 4.10^{8} metros. Exprese esa distancia como un número entero. ¿Cómo se lee?

3) La nanotecnología es un campo de las ciencias aplicadas dedicado al control y manipulación de la materia a una escala menor que un micrómetro (10^{-6} m). Lo más habitual es que tal manipulación se produzca en un rango entre uno y cien nanómetros.

El prefijo nano indica 10^{-9}, un nanómetro equivale a 10^{-9} metros:

a) Exprese la equivalencia 1 n m = 10^{-9} m sin emplear notación científica.

b) Ciertos dispositivos conocidos como nanobots tienen un tamaño de unos 50 nanómetros. Exprese este valor en metros utilizando notación científica.

4) Durante el año 2011, Argentina realizó exportaciones a Brasil por un monto aproximado de 17.500 millones de dólares. Exprese este monto utilizando notación científica.

5) El robot explorador espacial Curisity de la NASA recorrió 567 millones de km para aterrizar en el planeta Marte el 6 de agosto de 2012 a los 8 meses y 17 días de su partida. Exprese en km la distancia recorrida usando notación científica.

TEMA 2: RAZONES Y PROPORCIONES

1. Razón entre dos números

DEFINICIÓN

Dados dos números a y b distintos de cero, se llama razón al cociente exacto de los mismos. Se expresa $\frac{a}{b}$.

EJEMPLOS

La razón entre 3 y 6 es $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; entre -6 y 3 es -2; entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{8}$.

2. Proporciones

DEFINICIÓN

Una proporción es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. a y b son, respectivamente, antecedente y consecuente de la primera razón; c y d, de la segunda. También: a y d son los términos extremos; b y c, los términos medios.

EJEMPLO

$$\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$$

2.1. Propiedad fundamental de las proporciones

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; multipliquemos ambos miembros por $(b \cdot d)$ y obtendremos otra igualdad: $\frac{a}{b}(b \cdot d)=\frac{c}{d}(b \cdot d)$. Simplificando: $a \cdot d = c \cdot b$

PROPIEDAD

En toda proporción, el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

EJERCICIOS

1) Calcule el valor de x en las proporciones:

a) $\frac{x}{5}=\frac{7}{9}$ R: $\frac{35}{9}$

b) $\frac{0{,}2}{x}=\frac{10}{4}$ R: $\frac{2}{25}$

c) $\frac{1-\frac{1}{2}}{1+0{,}5}=\frac{0{,}2\cdot 4}{x}$ R: $\frac{12}{5}=2{,}4$

2) A partir de una proporción, pueden expresarse otras siete proporciones, por ejemplo, permutando los términos extremos: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,entonces: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$. Deduzca las otras seis.

3) Dada $\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$:

a) Pruebe que es una proporción.

b) Encuentre las otras siete que pueden formarse.

4) Puede demostrarse que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$; $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ " la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente (o consecuente) como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente (o consecuente)".

También se prueban: $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$; $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$

a) Aplique y verifique las propiedades enunciadas en el ejercicio 4, a partir de $\frac{12}{25}=\frac{36}{75}$.

b) Si a, b y c son números positivos, y , $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ entonces se dice que b es el medio proporcional entre a y c; también que b es la media geométrica entre a y c. Se tiene $b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$.

c) Halle la media geométrica entre: 4 y 9; 60 y 15 ; 7 y 14

Para dos números positivos cualesquiera a y c, la media aritmética es $\frac{a+c}{2}$ y la media geométrica es $\sqrt{ac}$.

Complete la tabla, consignando la media aritmética y la media geométrica de los números dados.

NÚMEROS	$\frac{a+c}{2}$	$\sqrt{ac}$
9 y 16		
12 y 75		
26 y 9		
63 y 28		

3. Serie de razones iguales

DEFINICIÓN

Una serie de razones iguales es la igualdad de dos o más razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots=\frac{m}{n}$$

PROPIEDAD

En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es a su respectivo consecuente. $\frac{a+c+\ldots+m}{b+d+\ldots+n}=\frac{a}{b}$

EJEMPLO

Exprese una serie de razones iguales (de cuatro razones) y compruebe la propiedad.

La definición de triángulos semejantes es: "dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos congruentes y sus lados proporcionales".

La proporcionalidad de los lados del triángulo se expresa mediante una "serie de razones iguales".

4. Magnitudes Proporcionales

El peso de un cuerpo, la longitud, el tiempo, el volumen, la superficie, la velocidad, el trabajo, son "magnitudes". De esas magnitudes, podemos dar "cantidades". Por ejemplo: de la magnitud tiempo: 4 horas; de la magnitud longitud: 25 centímetros.

DEFINICIÓN

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si a una cantidad de una de ellas corresponde una única de la otra, y si una cantidad de una de ellas se multiplica o divide por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número.

EJEMPLOS

a) La longitud de una cinta y el precio: si $8\,m$ de cinta cuestan $\$\,24$, entonces 40 *m*=$8\ m \times 5$ costarán $\$\,120$.

b) La longitud de una circunferencia y la longitud del radio. Sabemos que la longitud de la circunferencia está dada por la fórmula $L = 2\pi\ r$. Si el radio se multiplica por 6 (por ejemplo), la longitud de la circunferencia será $6L$.

c) En la fórmula $2\pi\ r$ "la constante de proporcionalidad" es 2π . Como 2*r* es igual al diámetro de la circunferencia, podemos expresar $L = \pi\ d$, y aquí, π es la constante de proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

DEFINICIÓN

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si a una cantidad de una de ellas corresponde una única de la otra, y si a una cantidad de una de ellas se la multiplica, o divide por un número, la otra queda dividida o multiplicada, respectivamente, por ese mismo número.

EJEMPLO

Si un automóvil lleva una velocidad constante de $40\,\frac{km}{h}$ y tarda 6 horas en recorrer cierta distancia, recorrería esa misma distancia en 3 horas, si la velocidad fuera constante, de $80\,\frac{km}{h}$

OBSERVACIÓN: d = v t En el enunciado se considera "constante" a la distancia. Luego, si d es constante, la velocidad es inversamente proporcional al tiempo: $v=\frac{d}{t}$ y el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad: $t=\frac{d}{v}$

EJERCICIOS

1) Si *y* varía directamente con *x* e *y = 32* cuando *x = 14*, encuentre *y* cuando *x = 49.*

SOLUCIÓN

Por tratarse de magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar:

$$\frac{32}{14}=\frac{y}{49}\Rightarrow y=\frac{32.49}{14}=112$$

2) Supóngase que s varía inversamente con respecto al cuadrado de t y que s =3 cuando t = 9. Encuentre a) la constante de proporcionalidad; b) la fórmula de *s* en función de *t; c*) *s* cuando *t = 15,* d) *t* cuando *s = 12.*

SOLUCIÓN

a) $s=\frac{k}{t^2}$; $3=\frac{k}{9^2}$, $3=\frac{k}{81}$; la constante es *k* = 3.81 = 243 ;

b) $s=\frac{243}{t^2}$

c) $s=\frac{243}{15^2}=\frac{243}{225}$; $s=\frac{81}{25}$;

d) $t^2=\frac{243}{s}$; $t^2=\frac{243}{12}$; $t^2=\frac{81}{4}$; $t=\sqrt{\frac{81}{4}}$; $t=\frac{9}{2}=4,5$

3) Si y es directamente proporcional a x^2, y sabemos que $y=9$ cuando $x=2$, determine y cuando $x=3$.

4) Se sabe que y es inversamente proporcional a x. Cuando $x=3$ es $y=8$. Encuentre y cuando $x=5$.

5) La pupila del ojo humano es casi circular. Si la intensidad de la luz *I* que entra es directamente proporcional al área de la pupila, exprese *I* como función del radio de la

pupila. ¿Cómo se ve afectada la pupila cuando se duplica la intensidad de la luz? Ayuda: el área de la pupila A = πr^2; la intensidad de la luz es directamente proporcional al área de la pupila: $I = k\,\pi\,r^2$.

DEFINICIÓN

Proporcionalidad conjunta: cuando la cantidad variable Q es proporcional al producto de dos o más cantidades variables puede decirse que Q varía conjuntamente con estas cantidades.

1) Exprese cada enunciado como una ecuación utilizando k como la constante de proporcionalidad.

   a) r es directamente proporcional a m^2 e inversamente proporcional a t.

   b) a es directamente proporcional a b^2 e inversamente proporcional a c^3.

2) La fórmula del área de un triángulo es: $A = \dfrac{b.h}{2}$, siendo *b* la base y *h* la altura.

   Exprese con palabras la proporcionalidad que describe la fórmula. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

3) Según la Ley de Gravitación de Newton, la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 queda expresada por $F = \dfrac{k\,m_1\,m_2}{d^2}$ donde *k* es una constante y

   d es la distancia entre las masas.

Diga cómo cambia la fuerza *F* si:

   a) las masas se duplican y la distancia permanece constante.

   b) las masas permanecen constantes y la distancia se reduce a la mitad.

   c) las masas se duplican y la distancia se reduce a la mitad.

4) Sabemos que a es directamente proporcional a b^2 e inversamente proporcional a c^3. Si $a = 17{,}8$ cuando $b = 8{,}3$ y $c = 1{,}4$; encuentre a cuando $b = 0{,}9$ y $c = 1{,}3$.

5) El volumen de la esfera varía directamente con respecto del cubo de su radio de acuerdo con la fórmula $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$. ¿Qué le sucede al volumen cuando se triplica el radio de la esfera?

6) La fuerza destructiva de un auto en un accidente automovilístico se puede describir en forma aproximada, diciendo que F (la fuerza destructiva) varía conjuntamente con respecto del peso del auto W y del cuadrado de la velocidad v del auto. ¿Cómo se afectaría F si:

   a) se duplica la velocidad del auto?

   b) se duplica el peso del auto?

7) Utilice la ecuación dada para describir con palabras la forma en que la variable del lado izquierdo de la ecuación varía con respecto a las variables del lado derecho. (k es una constante).

a) $S = 2 \cdot k \cdot r \cdot h$ (superficie del cilindro) R: $y = \frac{k \cdot x^3}{z}$

R: $M = 0{,}9\, x\, y^2$

c) $V = k \cdot r^2 \cdot h$ (volumen del cilindro)

e) $C = 2\pi$ r (longitud de la circunferencia) R: $M = 0{,}4 \frac{x^2\, y^3}{z}$

g) $V = \pi r^2 h$ (volumen del cilindro) R: $M = 0{,}2 \frac{x\;\; y^3}{z^2}$

4.1. Problemas de regla de tres simple

Los llamados problemas de regla de tres simple, se refieren a magnitudes proporcionales.

EJEMPLOS

1) Un obrero gana $\$\,300$ por 28 días de trabajo. ¿Cuánto cobraría por 15 días?

   28 días................................... $\$\,300$

   15 días................................... x

Las magnitudes involucradas son directamente proporcionales. Entonces:

entonces

$$\frac{28\text{ días}}{15\text{ días}} = \frac{\$\,300}{x} \qquad x = \frac{15\text{ días} \cdot \$\,300}{28\text{ días}}$$

$$x = \$\,160{,}70$$

2) En una fábrica, 20 máquinas realizan cierto trabajo en 1400 horas. ¿Cuánto tardarían en efectuar ese mismo trabajo 35 máquinas?

20 máquinas ....1400 horas

35 máquinas x

Las magnitudes involucradas son inversamente proporcionales.

entonces

$$\frac{20 \text{ máq.}}{35 \text{ máq.}} = \frac{x}{1400 \text{ h}} \qquad\qquad x = \frac{20 \text{ máq. } 1400 \text{ h}}{35 \text{ máq.}}$$

$x = 800$ horas

4.2. Porcentaje

EJEMPLOS

1) El siguiente es un problema de proporcionalidad directa: Si un comerciante vende a $ 5220 un televisor de $ 4500 de costo. ¿Cuánto gana por cada $\$ 100$ de esa venta?

SOLUCIÓN

La ganancia por la venta en $ 5220 de un televisor de $ 4500 de costo es la diferencia: $720

$4500 .... $ 720

$\$ 100$ x

entonces $\dfrac{4500}{100} = \dfrac{720}{x}$; $x = \dfrac{720.100}{4500} = 16$

$x = \$ 16$

Por cada $\$ 100$ de costo, gana $\$ 16$. Decimos que la ganancia es del 16 % del costo.

2) Calcular el 15 % de $\$ 300$.

$\$ 100$ .... $\$ 15$

$\$ 300$ x

entonces

$$\frac{\$ 100}{\$ 300} = \frac{\$ 15}{x} \qquad x = \$ 45 \qquad\qquad x = \frac{\$ 300 \cdot \$ 15}{\$ 100}$$

3) Justifique que el $r\ \%$ de una cantidad x puede hallarse directamente haciendo:

$$\frac{r}{100}\ de\ x = \frac{r}{100} x = \frac{r \cdot x}{100}.$$

a) Hallar qué porcentaje es 30 de 120.

b) Hallar qué porcentaje es 300 de 150.

4) Por pago en efectivo de una compra, en un supermercado, se efectúa el 5 % de bonificaci6n. Si se hace una compra por un valor de $\$\,125{,}80$, ¿cuánto habría que pagar?

5) El día 14 de septiembre del 2003 se depositaron $60.000 a plazo fijo, a 30 días, con el 12% de interés anual.

a) Calcular el interés y el importe a cobrar al final del plazo.

b) Si al vencimiento se agregaron $30.000 al monto resultante y el total se impone nuevamente a 30 días en las mismas condiciones. Calcule el interés y el capital obtenido al finalizar la operación.

R: a) Interés: $592; Importe a cobrar: $ 60.592.

R: b) Interés: $894; Importe a cobrar: $ 91.486.

TEMA 3: POLINOMIOS

La expresión algebraica $5x^3+3x^2-2x+1$ es un polinomio en la variable x y coeficientes 5, 3, -2, 1.

Este polinomio tiene cuatro *términos*: $5x^3$, $3x^2$, $-2x$, 1. Cada uno de los términos es un *monomio.*

Los números 5, 3, -2, 1 son los coeficientes y los exponentes de la variable son números enteros no negativos. El grado del polinomio es 3 porque es el mayor exponente de la variable.

La expresión $5x^{1/5}+4x^{-2}$ no es un polinomio porque los exponentes de la variable no son números enteros no negativos.

DEFINICIÓN

Se llama polinomio en la variable x y coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ a la siguiente expresión:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Grado de un polinomio

Si en el polinomio $P(x)$ es $a_n \neq 0$, el número *n* es el grado de $P(x)$.

Polinomio ordenado

Se dice que un polinomio está ordenado si los términos están escritos de manera que las potencias de la variable figuren ordenadas en forma creciente o decreciente. También se dice que el polinomio está escrito en forma estándar.

Está escrito en forma estándar el siguiente polinomio de grado n en la variable x:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ ; con } a_n \neq 0$$

$$\text{o bien: } a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \text{ ; con } a_n \neq 0$$

a_n es el coeficiente principal. Si el coeficiente principal es el número 1 (uno), se dice que se tiene un polinomio mónico.

Los coeficientes pueden ser números reales o complejos. En este curso operaremos con polinomios de coeficientes reales.

Polinomio completo

Un polinomio se dice completo si en él figuran todas las potencias de la variable, desde x^0 hasta x^n. En caso contrario se dice incompleto.

Completar un polinomio significa escribir, con coeficientes cero, todos los términos que faltan.

Ejemplo: Para completar y ordenar el polinomio $2x^2 - 1 + 3x^5 - 7x$ escribimos:

$$3x^5 + 2x^2 - 7x - 1 = 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 7x - 1$$

Polinomio nulo

Se llama polinomio nulo o idénticamente nulo al que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. El polinomio nulo no tiene grado.

Ejemplo: $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Polinomio constante

Un polinomio de grado cero es un polinomio constante. Ejemplo: $P(x) = -5$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes, es decir, de los términos que tienen las mismas potencias de la variable, son iguales entre sí.

Ejemplo: Son iguales los polinomios $P(x) = 3x + 2x^3 - x^2 - 1$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$

Algunos ejemplos de polinomios de coeficientes reales:

Polinomio	Grado	Ordenado	Completo
$-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 5x + 1$	4	Sí	No
$-3 + 9x^3 - 7x + 15x^4$	4	No	No
45	0	Sí	Sí
$x^6 + x^4 - 7x^3 + 1$	6	Sí	No
$-4x + 2x^3 - 7x^6$	6	Sí	No
$0x^4 + 3x^3 - x$	3	Sí	No
$0x^2 + 0x + 0$	no tiene		

1. Funciones polinómicas

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$ tiene coeficientes reales y convenimos en que x representa a cualquier número real, el polinomio define una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el codominio es ese mismo conjunto.

EJEMPLO

Si $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$, la correspondencia que define esa fórmula, para algunos valores de x, se ilustra en la tabla.

x	$P(x) = 2x^3 - 3x + 1$
-1	$-2+3+1=2$
0	1
1/2	$-1/4$
1	0
2	11

2. Operaciones con polinomios

Los cálculos con polinomios se basan en las propiedades de las operaciones con números reales porque los coeficientes son reales y la variable representa números reales, según hemos convenido.

Llamaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de todos los polinomios de coeficiente reales.

2.1 Adición

Para sumar los polinomios $P(x) = 4x^2 + 7x^4 - 2x^3 + 2$ y $Q(x) = 3x - 5 + 7x^3$ se los completa y ordena. Luego conviene escribirlos encolumnados a fin de sumar los términos semejantes.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & 7x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & + & 0x & + & 2 \\
+ & & & 7x^3 & & & + & 3x & - & 5 \\
\hline
 & 7x^4 & + & 5x^3 & + & 4x^2 & + & 3x & - & 3
\end{array}
$$

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Entonces: $P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

El grado del polinomio suma no supera al grado del polinomio del sumando de mayor grado.

PROPIEDADES

1) La suma de dos polinomios de coeficientes reales $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio perteneciente también a ese conjunto: $(P+Q)\in\mathbb{R}[x]$ (ley de cierre).

2) Asociativa: $(P+Q)+R=P+(Q+R)$

3) Conmutativa: $P+Q=Q+P$

4) Existencia de elemento neutro: existe el polinomio nulo $0\in\mathbb{R}[x]$, tal que para todo $P\in\mathbb{R}[x]$ es $P+0=0+P=P$.

5) Existencia de elemento opuesto: para todo polinomio $P(x)$ distinto del polinomio nulo existe el polinomio opuesto $(-P(x))$ tal que $P(x)+(-P(x))=0$.

Ejemplo: el opuesto de $3x^2+5x-2$ es $-3x^2-5x+2$.
En efecto: $(3x^2+5x-2)+(-3x^2-5x+2)=0$

2.2. Diferencia o sustracción

Para restar dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$ sumamos a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$.

$P(x)$ es el minuendo y $Q(x)$ es el sustraendo.

$$P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}x^3+5x-\frac{1}{2}x^2+3\right)-(2x^2+x^3-5)$

Sumamos a *P(x)* el opuesto de *Q(x):*

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & \frac{2}{3}x^3 & - & \frac{1}{2}x^2 & + & 5x & + & 3 \\ + & -x^3 & - & 2x^2 & & & + & 5 \\ \hline & -\frac{1}{3}x^3 & - & \frac{5}{2}x^2 & + & 5x & + & 8 \end{array}$$

2.3. Multiplicación

Para hallar el producto entre dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la propiedad asociativa de la suma. El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base y exponente igual a la suma de los exponentes de los factores: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

$$(a_1 x + a_0)(b_1 x + b_0) = a_1 b_1 x^2 + a_1 b_0 x + a_0 b_1 x + a_0 b_0 = a_1 b_1 x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los factores:

$$gr\left[P(x) \cdot Q(x)\right] = gr\ P(x) + gr\ Q(x)$$

EJEMPLOS

$$4x^2\left(x^3 - 5x^2 - x + 6\right) = 4x^5 - 20x^4 - 4x^3 + 24x^2$$

$$\left(6x^3 - 3x + 7 - x^2\right)\left(x^2 - x + 1\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
6x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 7 & & & & & & \\
 & & x^2 & - & x & + & 1 & & & & & & \\
\hline
6x^5 & - & x^4 & - & 3x^3 & + & 7x^2 & & & & & & \\
 & - & 6x^4 & + & x^3 & + & 3x^2 & - & 7x & & & & \\
 & & & & 6x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 7 & & \\
\hline
6x^5 & - & 7x^4 & + & 4x^3 & + & 9x^2 & - & 10x & + & 7 & &
\end{array}$$

PROPIEDADES

1) El producto de dos polinomios pertenecientes a $\mathbb{R}[x]$ es otro polinomio perteneciente a ese conjunto. (Ley de cierre).

2) Asociativa: $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$.

3) Conmutativa: $P \cdot Q = Q \cdot P$.

4) Existencia de elemento neutro: existe el polinomio 1 (polinomio identidad) tal que para todo polinomio P se cumple: $P \cdot 1 = 1 \cdot P = P$.

5) Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$.

2.4. División

Dados dos números enteros, por ejemplo, 25 y 6, existen dos únicos números enteros, 4 y 1, tales que $25 = 6 \cdot 4 + 1$ y $1 < 6$. La operación es la división $\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$

25 es el dividendo, 6 es el divisor, 4 es el cociente y 1 es el resto de la división. El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto, y el resto es menor que el divisor.

En el caso de la división de dos polinomios, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x)$ distinto de cero, existen dos únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, y el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$ o bien $R(x) = 0$.

$P(x)$ es el dividendo; $Q(x)$, el divisor; $C(x)$ el cociente y $R(x)$, el resto de la división.

Para dividir dos polinomios procedemos como en el ejemplo:

$$(2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 33x + 10) : (x^2 - x + 5)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -8x^3 & +9x^2 & -33x & +10 & x^2 - x + 5 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +2x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 - 6x - 7 \\ \cline{1-3}
 & -6x^3 & -x^2 & -33x & & \\
 & 6x^3 & -6x^2 & +30x & & \\ \cline{2-4}
 & & -7x^2 & -3x & +10 & \\
 & & 7x^2 & -7x & +35 & \\ \cline{3-5}
 & & & -10x & +45 &
\end{array}$$

$C(x) = 2x^2 - 6x - 7$; $R(x) = -10x + 45$.

Pruebe que C(x) .Q (x) + R(x) = P(x)

2.5. Regla de Ruffini o división sintética

Para dividir un polinomio *P(x)* por un binomio de la forma $(x - a)$ podemos usar la Regla de Ruffini, también llamada división sintética, que explicaremos mediante un caso particular: la división de un polinomio de cuarto grado por el binomio $(x - a)$.

Se ordena y completa el polinomio dividendo. El cociente será un polinomio de tercer grado y el resto será una constante o bien el número cero:

$$\left(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\right):(x-a)=\left(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)+R$$

Se disponen los coeficientes del dividendo y el número a como figuran en el esquema.

El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo.

Los siguientes coeficientes y el resto se obtienen, ordenadamente, sumando al coeficiente correspondiente del dividendo, el producto del coeficiente del cociente, obtenido en el paso anterior, por el número a.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a & & & & & \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \boxed{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= a_3+b_3a \\ b_1 &= a_2+b_2a \\ b_0 &= a_1+b_1a \\ R &= a_0+b_0a \end{aligned}$$

EJEMPLO

1) Divida $\left(2x^4-x^3+2x^2-3x+1\right):(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$C(x)=2x^3+x^2+3x$; $R(x)=1$.

2) Si el divisor es $(x+a)$, hacemos $x+a=x-(-a)$.

EJEMPLO

Divida $\left(4x^3+4x^2+x+75\right):(x+3)$.

Expresamos: $x+3=x-(-3)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 4 & 1 & 75 \\ -3 & & -12 & 24 & -75 \\ \hline & 4 & -8 & 25 & \boxed{0} \end{array}$$

Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es múltiplo del divisor y también que el dividendo es divisible por el divisor. En el ejemplo, el polinomio dado es divisible por $x+3$ porque el resto es cero.

Podemos escribir $4x^3+4x^2+x+75:(x+3)=4x^2-8x+25$.

El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente:

$$4x^3+4x^2+x+75=(x+3)\left(4x^2-8x+25\right)$$

EJERCICIOS

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\left(3x^3-x^4+5x^2-x+1\right)+\left(-6x+7x^4-2x^2+2\right)+\left(x^4+x^3-3x^2+2x\right)$

b) $\left(5x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}x^3+3x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(4x^2-5x+3\right)\left(x^2-4x+1\right)$

d) $(3-x)\left(5-x+x^2\right)\left(2x^2-1\right)$

e) $\left(2x-1-2x^2\right)\left(6x-9-x^2\right)$

f) $\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)$

g) $\left(0,5x^2-x+1,2\right)(1,2x-0,9)$

h) $\left(5x^3+3x^2-x+1\right):\left(x^2-x+1\right)$

i) $\left(x^4+3x^2-5x+2\right):(2x-1)$

j) $\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+16x-4\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$

RESPUESTAS

a) $7x^4+4x^3-5x+3$

b) $\frac{29}{5}x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{14}{5}x+\frac{1}{4}$

c) $4x^4-21x^3+27x^2-17x+3$

d) $-2x^5+8x^4-15x^3+26x^2+8x-15$

e) $2x^4-14x^3+31x^2-24x+9$

f) $2x^5-\frac{1}{3}x^4-\frac{5}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2-2x+2$

g) $0,6x^3-1,65x^2+2,34x-1,08$

h) $C(x)=5x+8;\ R(x)=2x-7$

i) $C(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{27}{16}$ $R=\frac{5}{16}$

j) $C(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2+5x+2$ $R=-10$

EJERCICIOS DE REVISIÓN

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-2x^4+x^3-x^2+3)+(3x^3+2-5x^2-6x^5)+(-4+3x^5-2x^4+8x^2)$

b) $(6x^6-2x^4+5x^3-7x-3)-(-3x^5+2x^4+5x^3+5x-3)$

c) $(2x-1-2x^2)(6x-9-x^2)$

2) Halle el polinomio que dividido por $5x^2-1$ da el cociente $2x^2+x-2$ y el resto $x-2$.

R: $10x^4+5x^3-12x^2$

3) Encuentre a, b, c y d si: $a+(a-b)x+(b-c)x^2+dx^3=8+12x+5x^2-10x^3$

R: $a=8;\ b=-4;c=-9;\ d=-10$

4) Encuentre a,b, c y d tales que $ax^3+(a+b)x^2+(a-c)x+d$ = $12x^3-3x^2+3x-4$

5) Operando con el segundo miembro verifique la forma “anidada” del polinomio:

a) $4x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = \{[(4x-5)x] + 2\}x - 1$

b) $5x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4 = \{[[(5x+1)x - 3]x + 2]x - 1\}x + 4$

c) $4x^4 - 2x^2 + x - 1 = \{(4x^2 - 2)x^2 + 1\}x - 1$

d) $3x^3 + 2x^2 - 6x + 4 = \{[(3x+2)x] - 6\}x + 4$

6) Exprese en forma anidada y verifique:

a) $4x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2^2 - x + \frac{1}{3}$

b) $-x^5 + 2x^4 - \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$

c) $x^5 + 2x^3 - 3x + 5$

d) $x^6 + 5x^5 - 3x^2 - 2x + 4$

7) Halle el cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini.

a) $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) : (x - 3)$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

c) $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}\right) : (x - 1)$

$d)(x^3 - 27):(x - 3)$; $e)(x^3 + 27):(x + 3)$

$f)(x^4 + 16):(x + 2)$; $g)(x^4 - 16):(x - 2)$

$h)(x^4 - 16):(x + 2)$; $i)(x^4 + 16):(x - 2)$

RESPUESTAS

a) $C(x) = 2x^2 + 9x + 31;\ R = 98$

b) $C(x) = x^4 + x^2 + 1\ ;R = 0$

c) $C(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{7}{12}\ ;\ R = \frac{47}{60}$

d) $C(x) = x^2 + 3x + 9;\ R = 0$

e) $C(x) = x^2 - 3x + 9;\ R = 0$

f) $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8;\ R = 32$

g) $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8;\ R = 0$

h) $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; R= 0

i) $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$; R= 32

2.6. Divisibilidad de polinomios

Si el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ es cero se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

En tal caso, $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

En el ejercicio 6-h se ha probado que es $x^4 - 16$ divisible por $x - 2$ en consecuencia, podemos decir que $x - 2$ es divisor de $x^4 - 16$.

8) Determine si la primera expresión es divisor de la segunda.

a) $x-2$; $x^4+3x^3-5x^2+2x-24$

b) $x-5$; $x^3+2x^2-25x-50$

c) $x+\frac{3}{2}$; $2x^4+5x^3+3x^2+8x+12$

Divisibilidad de una suma o una diferencia de dos potencias de igual grado por la suma o la diferencia de las bases

Los ejercicios 6- ítems d, e, f, g, h, i proponen la división de una suma o de una diferencia de dos potencias de igual grado (de igual exponente) por la suma o por la diferencia de las bases. El resto resultó cero en d, e, g, h.

Generalizando podemos establecer las siguientes conclusiones:

$$x^n + a^n \ \textit{es divisible por} \ x+a \ \textit{si} \ n \ \textit{es impar}.$$
$$x^n + a^n \ \textit{nunca es divisible por} \ x-a.$$
$$x^n - a^n \ \textit{es divisible por} \ x+a \ \textit{si} \ n \ \textit{es par}.$$
$$x^n - a^n \ \textit{siempre es divisible por} \ x-a, \textit{sea n par o impar}. 3{,}091$$

EJERCICIO

Verifique:

$$(x^4-a^4):(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$$
$$(x^4-a^4):(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$$
$$(x^3+a^3):(x+a)=x^2-ax+a^2$$

2.5.1. Valor de un polinomio *P*(*x*) para *x* = *a*

Si en el polinomio $P(x)=2x^2+x-1$ reemplazamos la variable x por un número real a, obtendremos como resultado un número real que llamaremos valor de P(x) para $x=a$.

EJEMPLOS

Si $x=1$, $P(1)=2$

Si $x=-4$, $P(-4)=27$

Si $x=-1$, $P(-1)=0$

DEFINICIÓN

El valor de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es el número que resulta de reemplazar la variable x por el número a.

Si el polinomio tiene coeficientes reales y a es un número real, el valor obtenido será real; si a es un número complejo, el valor obtenido será complejo.

EJERCICIOS

1) Halle el valor de $P(x)=3x^4+x^3-3x^2+x+2$ para $x=6$.

Observación: Puede expresarse $P(x)$ en forma anidada para facilitar el cálculo:

$$P(x)=\{[(3x+1)x-3]x+1\}x+2$$

Sustituimos x por 6 y el cálculo se realiza en forma sencilla. Si usamos la calculadora se oprimen las teclas indicadas:

$$3\ \boxed{\times}\ 6\ \boxed{+}\ 1\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ 6\ \boxed{-}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ 6\ \boxed{+}\ 1\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ 6\ \boxed{+}\ 2\ \boxed{=}\ 4004$$

Encuentre el valor de $P(x)=2x^4+3x^3-3x^2-x+2$ para $x=-1$; $x=2$ y $x=-3$.
R: $P(-1)=-1$; $P(2)=44$; $P(-3)=59$

2) Exprese el polinomio $P(x)=\dfrac{3}{2}x^3-6x^2-x+\dfrac{2}{3}$ en forma anidada y encuentre su valor para $x=\dfrac{2}{3}$

2.6. Teorema del resto

Si dividimos un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x-a$, obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R tales que $P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R$. El resto R tendrá grado cero o será el número cero.

Si reemplazamos x por a, es decir, obtendremos el *“valor del polinomio para $x=a$”.*

$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+R$ $\qquad$ $P(a)=0+R$ $\qquad$ Luego $P(a)=R$.

Hemos demostrado el teorema del resto o del residuo que puede enunciarse:

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ de grado mayor o igual que uno por un binomio $x-a$ es igual al valor del polinomio para $x=a$.

Otra forma de enunciar este teorema es:

El valor de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es igual al resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)$.

EJEMPLO

El valor de $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ para $x=2$ es igual al resto de la división de *P(x)* por *x – 2.*

En efecto: $P(2)=2^3+5\cdot 2^2-2\cdot 2-24=0$

Calculemos el cociente y el resto usando división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & -2 & -24 \\ 2 & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

El resto es igual a 0(cero) y coincide con el valor hallado: $R=P(2)=0$.

En este ejemplo el resto de la división es cero. Se dice entonces que $P(x)$ es divisible por $(x-2)$ y podemos escribir: $x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x^2+7x+12)$

Hemos expresado el polinomio dado como el producto de dos factores. Uno de ellos, el binomio$(x-2)$, queda perfectamente identificado al comprobar que el polinomio se anula para $x=2$.

2.7. Teorema del factor

A partir del teorema del resto podemos demostrar el "teorema del factor", el cual puede enunciarse de las siguientes formas:

"Un polinomio *P(x)* es divisible por *(x – a)* si y sólo si se anula para *x = a*" y también " (*x – a*) es un factor de *P(x)* si y sólo si *P(a) = 0*."

EJERCICIOS

1) Demuestre que $x-a$ es un factor de $P(x)$ y factorice $P(x)$.

a) $P(x)=x^6+8x^4-6x^3-9x^2;\ x+3$

b) $P(x)=x^3+2x^2-13x+10;\ x+5$

c) $P(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+12;\ x+1$

2) a) Demuestre que $x-b$ es factor de los binomios: $x^5-b^5;\ x^6-b^6;\ x^7-b^7;\ x^8-b^8$.

   b) Encuentre el cociente correspondiente mediante la Regla de Ruffini.

3) Demuestre que $x+a$ es factor de x^5+a^5 y también de x^7+a^7. Exprese estos polinomios como producto.

2.7.1. Ceros de un polinomio

Si $P(x)$ es un polinomio y para $x=a$ es $P(a)=0$; entonces a es un cero de $P(x)$.
El cálculo de los ceros o raíces de un polinomio es de gran utilidad en Matemática.

EJEMPLO

Si $P(x)=x^2+x-2$ y hacemos $x=1$ resulta $P(1)=0$; si $x=-2$, es $P(-2)=0$.

Decimos entonces que 1 y -2 son ceros de $P(x)$.

Por el teorema del resto sabemos que $P(a)$ es igual al resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)$. Luego, si a es un cero del polinomio, $x-a$ es un factor del polinomio.

Si dividimos el polinomio $P(x)=x^2+x-2$ por *(x – 1)* el cociente será *(x + 2)* y el resto será 0 (cero). Podrá expresarse $P(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

EJERCICIOS

1) Analice los polinomios y diga cuál es el grado y cuáles son los ceros.

a) $5\,(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$

b) $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+9)\,(x-1)^2$

2) Exprese el polinomio mónico $(a_n = 1)$ de cuarto grado cuyos ceros son –1; 3; -3 y -4.

3) Indique los ceros de los siguientes polinomios sin efectuar cálculos:

a) $x\,(x+4)\,(x-2)\,(x+1)$

b) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

c) $3\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

4) Indique por cuál binomio es divisible:

$A = x^5 + 1$ $\quad B = a^5x^5 - \frac{1}{32}$ $\quad C = 8a^3 - x^3$

$D = x^4 - 81$ $\quad E = 9x^2 - 4a^4$ $\quad F = y^8 - \frac{1}{4}a^4$

RESPUESTAS

1) a) grado 3; ceros: 1, -3, -7 b) grado 4; ceros: $-\frac{1}{2}, -9, 1$, 1 (1 es raíz doble)

2) (x + 1) (x – 3) (x + 3) (x + 4) = $x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 45x - 36$

3) a) 0, -4, 2, -1 ; b) $\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$; c) $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = -\frac{2}{5}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$ (raíz doble $\frac{1}{2}$)

4) A por (x + *1*) ; B por ($a\,x$ - $\frac{1}{2}$) ; C por (*2 a* – x) ; D por (*x – 9)* y (*x + 9*)

E por (3 x + 2 a^2) y (3 x - 2 a^2) ; F por $(y^4 - \frac{1}{2}a^2)$ y $(y^4 + \frac{1}{2}a^2)$

3. Cuadrado de un binomio

El cuadrado de $a+b$ es $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 .$$

REGLAS

El cuadrado de $a+b$ es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo.

El cuadrado de $a-b$ es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Por resultado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLOS

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2.3x.5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2y^3\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 2y^3 + 4y^6 = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2y^3 + 4y^6$

c) $(a^3 - x^3)^2 = a^6 - 2a^3x^3 + x^6$

4. Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

REGLA

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término más (o menos) tres veces el producto del cuadrado del primero por el segundo más tres veces el primero por el cuadrado del segundo más (o menos) el cubo del segundo. El resultado es un cuatrinomio cubo perfecto.

EJEMPLOS

a) $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\,y + 3.2xy^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

b) $(3a-1)^3 = (3a)^3 - 3(3a)^2 + 3.3a - 1 = 27a^3 - 27a^2 + 9a - 1$

c) $(2x^2+a^3)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2\,a^3 + 3.2x^2\,(a^3)^2 + (a^3)^3 = 8x^6 + 12x^4a^3 + 6x^2a^6 + a^9$

5. Producto de dos binomios conjugados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

REGLA

El producto $(a+b)(a-b)$ es igual a la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$.

EJEMPLOS

a) $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$

b) $(a^2 - x^3)(a^2 + x^3) = (a^2)^2 - (x^3)^2 = a^4 - x^6$

EJERCICIOS

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right)\left(\frac{1}{3}x^2 + 3\right)$

b) $(3a^2x+1)^2$

c) $(x^2-2)^3$

d) $\left(\frac{1}{2}a^2x - \frac{2}{a}\right)^2$

6. Factorización de expresiones algebraicas

Factorizar una expresión algebraica significa transformarla en el producto de dos o más factores.

6.1. Algunos casos de factoreo

6.1.1. Factor común

Dada la expresión algebraica $15x^3y^2 + 6x^2y^3$ se busca el máximo común divisor: $3x^2y^2$. Se divide cada término por ese factor común y se expresa el producto: $15x^3y^2 + 6x^2y^3 = 3x^2y^2(5x + 2y)$.

Para comprobar que la factorización es correcta, se aplica la propiedad distributiva en el segundo miembro.

EJERCICIO

Transforme en producto:

a) $16a^2x^2 - 4x^3a^3$ b) $12a^4 + 9a^3x - 12a^2x^2$ c) $4x(a-2) + 7y(a-2)$

6.1.2. Factorización por agrupamiento

Ejemplo: $ax - ay - by + bx$

Asociamos los términos que tengan factores comunes: $(ax + bx) + (-ay - by)$.

Se extrae el factor común de cada paréntesis $x(a+b) - y(a+b)$ y finalmente se aplica el caso anterior: $(a+b)(x-y)$

Observación: en este ejemplo también puede agruparse como sigue:

$$ax - ay - by + bx = (ax - ay) + (-by + bx) = a(x-y) + b(x-y) = (x-y) + (a+b)$$

EJERCICIO

Transforme en producto:

a) $xy - 2y + 6 - 3x$ b) $6ab + 2b + 3a + 1$ c) $15x^3 - 9y^3 - 15x^2y^2 + 9xy$

6.1.3. Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza expresándolo como el cuadrado de un binomio.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

EJEMPLOS

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x+3)^2$

b) $9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 2.3.5xy + (5y)^2 = (3x - 2y)^2$

c) $25x^6 - 10x^3 + 1 = (5x^3)^2 - 2.5x^3 + 1^2 = (5x^3 - 1)^2$

d) $\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 4y^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + 2\frac{1}{2}2x^2y + (2y)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2y\right)^2$

6.1.4. Cuatrinomio cubo perfecto

Se factoriza expresándolo como el cubo de un binomio.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \quad ; \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

EJEMPLOS

a) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x+2y)^3$

b) $1 - 9ax + 27a^2x^2 - 27a^3x^3 = (1-3ax)^3$

6.1.5. Diferencia de cuadrados

Se factoriza expresando la diferencia de los cuadrados como el producto de la suma por la diferencia de las bases.

EJEMPLOS

a) $16 - a^2 = (4+a)(4-a)$

b) $\frac{25}{m^2} - 36 = \left(\frac{5}{m} + 6\right)\left(\frac{5}{m} - 6\right)$

c) $\frac{4}{25}a^4 - \frac{1}{9}x^2 = \left(\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{3}x\right)$

d) $x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = (x^2 + a^2)(x+a)(x-a)$

6.1.6. Suma o diferencia de potencias de igual grado

Se factoriza teniendo en cuenta las condiciones de divisibilidad estudiadas.

EJEMPLOS

a) $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

b) $x^4-16=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$

c) $x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$

Observación: cuando el binomio factor es (x + a) los signos del otro factor son alternados, siendo el primero positivo.

Cuando el binomio factor es (x - a) los términos del otro factor son positivos.

EJERCICIOS

1) Encuentre el cuadrado y el cubo de los binomios:

a) $a+b$ b) $a-b$ c) $5+\frac{a}{5}$ d) $\frac{1}{2}+x$ e) $1-5x^2$ f) $a^{-1}-\frac{1}{2}$

2) Calcule:

a) $(-1+2x^2)^2$ b) $\left(ab^2-\frac{1}{2}a^2b\right)^2$ c) $\left(m-\frac{5}{m}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)^3$

RESPUESTAS

a) $1-4x^2+4x^4$

b) $a^2b^4-a^3b^3+\frac{1}{4}a^4b^2$

c) $m^3-15m+\frac{75}{m}-\frac{125}{m^3}$

d) $\frac{1}{8}+\frac{3}{2}a^2+6a^4+8a^6$

3) Factorice los siguientes polinomios:

a) $6a^2x^2+9abx^2+3acx^2$

b) $2x^3y-3y^2x^2+11x^4-9x^5y^3$

c) $3x(2-x)+4x^2(2-x)$

d) $\frac{1}{6}x^3y^6-\frac{2}{9}x^3y^5+\frac{1}{4}x^2y^{12}$

e) $2mx^2+3px^2-4m-6p$

f) $2ax+2bx-ay+5a-by+5b$

g) $4+4a+a^2$

h) $1-2a+a^2$

i) $a^4+2a^2x^3+x^6$

j) $x^2+36-12x$

k) $\frac{x^2}{4}+a^2x+a^4$

l) $\frac{x^3}{27}-\frac{ax^2}{3}+a^2x-a^3$

m) $y^3+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{16}y+\frac{1}{64}$

n) $9x^2-1$

o) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

p) y^6-36x^4

q) $a-x^2$

r) $81-x^4$

s) $\frac{1}{9}x^2y^2+\frac{1}{3}x^2yz+\frac{1}{4}x^2z^2$

t) $16\left(x-2a\right)^2-4\left(x-2a\right)^3$

RESPUESTAS

a) $3ax^2\left(2a+3b+c\right)$

b) $x^2\left(2xy-3y^2+11x^2-9x^3y^2\right)$

c) $\left(2-x\right)x\left(3+4x\right)$

d) $\frac{1}{3}x^2y^5\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y^7\right)$

e) $\left(2m+3p\right)\left(x^2-2\right)$

f) $\left(a+b\right)\left(2x+5-y\right)$

g) $\left(2+a\right)^2$

h) $\left(1-a\right)^2$

i) $\left(a^2+x^3\right)^2$

j) $\left(x-6\right)^2$

k) $\left(\frac{x}{2}+a^2\right)^2$

l) $\left(\frac{x}{3}-a\right)^3$

m) $\left(y+\frac{1}{4}\right)^3$

n) $\left(3x+1\right)\left(3x-1\right)$

o) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{a}\right)$

p) $\left(y^3+6x^2\right)\left(y^3-6x^2\right)$

q) $\left(\sqrt{a}+x\right)\left(\sqrt{a}-x\right)$

r) $\left(3+x\right)\left(3-x\right)\left(9+x^2\right)$

s) $x^2\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z\right)^2$

t) $4\left(x-2a\right)^2\left(4-x+2a\right)$

4) Encuentre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios

a) $P=ax^2-ab^2$; $Q=x^2-2bx+b^2$; $S=\left(x^3-b^3\right)$

b) $P=ax-3a-b^2x+3b^2$; $Q=a^2x^2-9a^2-b^4x^2+9b^4$

RESPUESTAS

a) $x-b$ $\qquad a\left(x-b\right)^2\left(x+b\right)\left(x^2+bx+b^2\right)$

b) $\left(x-3\right)\left(a-b^2\right);\left(a-b^2\right)\left(x-3\right)$ $\qquad \left(a-b^2\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(a+b^2\right)$

5) La forma totalmente factorizada de $9x^3 - x\,y^2 + 9\,x^2\, y - y^3$ es:

a) $\left(9\,x^2 + y^2\right)\left(\,x + y\right)$

b) $\left(3\,x + y\right)^2 \left(\,x + y\right)$

c) $\left(3\,x - y\right)^2 \left(\,x + y\right)$

d) $\left(3\,x + y\right)\,\left(3\,x - y\right)\left(\,x + y\right)$

e) ninguna de las anteriores

6) ¿Cuál es la forma totalmente factorizada de la expresión $x^2\,(x-2) - 4x\,(x-2) + 4\,(x-2)$?

a) $\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2$

b) $(x-2)(\,x^2 - 2x + 4)$

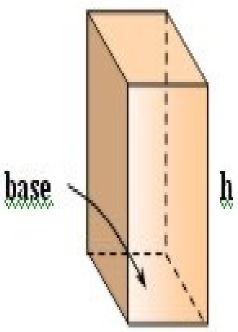
c) $(x\ +2)(x-2)^2$

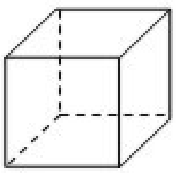
d) $(x-2)^3$

e) ninguna de las anteriores

7) Una caja tiene las siguientes dimensiones: largo $= x$, ancho $= x - 3$ y alto $= x + 5$. Exprese el volumen en función de x.

R: $V\left(x\right) = x^3 + 2x^2 - 15x$





8) Halle el perímetro y la superficie de un cantero circular que tiene $12{,}30\ m$ de diámetro. (la longitud de una circunferencia = $2\,\pi\, r$; la superficie de un círculo = πr^2)

9) Un laboratorio desea lanzar al mercado un nuevo producto y necesita diseñar el packaging. Para ello ha pensado en dos opciones: un prisma y un cubo. El ancho de ambos deberá ser el mismo pero el prisma tendrá el triple de profundidad y 4 cm menos de altura. Encuentre las medidas y el volumen de cada caja.

SOLUCIÓN

Llamemos *x* a la arista del cubo. El volumen del cubo es igual al área de la base multiplicada por la altura: Volumen del cubo = (área base) x (altura)

Volumen del cubo = (*x.x) . x* = x^3

La base del prisma será un rectángulo, uno de los lados tendrá *x* cm; el otro lado tendrá *3.x* cm (la profundidad) y la altura será de *(x – 4) cm.*

Volumen del prisma = (área base) . altura; V = $(x.3x)(x-4)$

Volumen del prisma= $x.3x.(x-4) = 3x^3 - 12x^2$

Igualando los volúmenes: $3x^3 - 12x^2 = x^3$

$3x^3 - 12x^2 - x^3 = 0$; $2x^3 - 12x^2 = 0$

Para resolver la ecuación podemos factorizar el primer miembro: $2x^2(x-6)=0$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$.

La primera solución no conviene al problema, entonces la única solución es *x = 6*

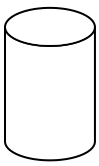
El nuevo packaging podrá ser un cubo de 6 *cm* de arista o un prisma de base rectangular de dimensiones:

ancho= 6 *cm,; profundidad = 3 . 6 cm= 18 cm y altura= 6 cm – 2 cm = 2 cm.*

VERIFICACIÓN

V cubo= $(6cm)^3 = 216cm^3$; V prisma = (6 cm)(18 cm)(2cm) = 216 cm^3.

10) Para guardar azufre en polvo se ha pensado en un tubo cilíndrico y se deberá elegir entre dos recipientes que poseen esta característica y tienen la misma capacidad. El cilindro A tiene una altura igual a su radio y el cilindro B posee un radio igual al doble del radio de A y una altura 6 cm menor. Halle las dimensiones de los cilindros y el volumen.



Volumen cilindro = (área base). altura = $\pi.r^2.h$

SOLUCIÓN

Si la altura del cilindro A es igual al radio y el radio del cilindro B es el doble del radio de A y su altura es 6 cm menor podemos expresar:

Volumen A = $\pi . r^2.r = \pi. r^3$

Volumen B = $\pi.(2r)^2.(r-6) = \pi [4r^2.(r-6)] = 4\pi r^2(r-6)$

Como los volúmenes son iguales: $\pi r^3 = 4\pi r^2 (r-6)$

Dividimos ambos miembros por πr^2 y se obtiene una ecuación de primer grado:

$r = 4(r-6)$; $r = 4r - 24$;

4 r – 24 – r = 0 ; 3 r – 24 =0; 3 r = 24; r = $\frac{24}{3} = 8$

El radio del cilindro A es de 8 cm y la altura es también de 8 cm.

El radio del cilindro B = 2r = 2 . 8 cm = 16 cm

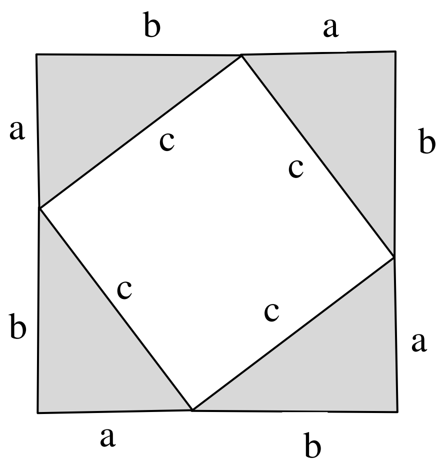
La altura del cilindro B = r – 6cm = 8 cm – 6 cm = 2 cm

Volumen A = $\pi . r^3$ = 3,14. $(8cm)^3$ = 1607,68 cm^3

Volumen cilindro B = $\pi.(4r^3 - 24r^2)$ = 3,14 .[4.$(8\ cm)^3$ - 24.$(8\ cm)^2$ = 1607,68 cm^3

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Si los catetos de un triángulo son *a* y *b* y la hipotenu el teorema de Pitágoras demuestra que $c^2 = a^2 + b^2$

Una demostración del teorema

Construimos un cuadrado de lados $(a+b)$. Su área es: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1) y trazamos los segmentos necesarios para que queden determinados cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. El área de cada triángulo es A = $\frac{ab}{2}$.

El cuadrilátero interior es un cuadrado de lado *c* y área $A_1 = c^2$.

El área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado de lado *c.*

$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$; Reemplazamos el primer miembro por el segundo miembro de (1):

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$; despejamos $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

$c^2 = a^2 + b^2$; Luego la hipotenusa es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

EJERCICIOS

1) Las longitudes de los lados de un triángulo son 15 cm, 24 cm y 30 cm. ¿Es un triángulo rectángulo?

2) Una plaza es un cuadrado de 14400 metros cuadrados. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?

TEMA 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

DEFINICIÓN

Si $P(x)$ y Q (x) son dos polinomios, y $Q(x)$ es distinto de cero, la expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se llama expresión racional fraccionaria.

EJEMPLO

$\dfrac{3x-5}{4x-1}$ es una expresión racional fraccionaria, válida (o que tiene sentido) para todo x que sea un número real, excepto para $x=\dfrac{1}{4}$, porque en este caso el denominador se anula.

1. Cero o raíz de una expresión racional fraccionaria

DEFINICIÓN

Un número real "α" es cero o raíz de una expresión racional fraccionaria, si esa expresión tiene sentido para $x=\alpha$, y se anula para $x=\alpha$.

Esto significa que al reemplazar la variable x por el número α el denominador debe ser distinto de cero y el numerador debe anularse.

EJEMPLOS

a) $x=\dfrac{5}{3}$ es cero de $\dfrac{3x-5}{4x-1}$ porque la expresión tiene sentido para $x=\dfrac{5}{3}$ pues

$4\,\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{17}{3}\neq 0$ y se anula para $x=\dfrac{5}{3}$: $\dfrac{3\,\frac{5}{3}-5}{4\,\frac{5}{3}-1}=\dfrac{5-5}{\frac{17}{3}}=0$

b) La fracción $\dfrac{4x^2-4}{x^2+x}$ puede escribirse $\dfrac{4(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$. Esta expresión es equivalente a la dada.

El denominador se anula para $x=0$ y para $x=-1$. En consecuencia la expresión tiene sentido para todo número real, excepto para $x=0$ y $x=-1$. Observamos que el factor

$(x+1)$ figura en el numerador y en el denominador. Podemos simplificar la expresión dividiendo ambos por dicho factor y tendremos: $\dfrac{4x^2-4}{x^2+x}=\dfrac{4(x-1)}{x}$ con $x\neq -1$ y $x\neq 0$. La división efectuada es válida para $x\neq -1$. El único cero o raíz de la expresión fraccionaria es $x=1$

EJERCICIOS

1) Indique para qué valores de la variable son válidas las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{2}{x+2}$ b) $\dfrac{x+2}{x+\frac{1}{2}}$ c) $\dfrac{3x-7}{x^2-1}$ d) $\dfrac{-5}{4x}$ e) $\dfrac{-2x}{x^2-25}$

RESPUESTAS

a) Para todo x tal que $x\neq -2$

b) Para todo x tal que $x\neq -\dfrac{1}{2}$

c) Para todo x tal que $x\neq 1$ y $x\neq -1$

d) Para todo x tal que $x\neq 0$

e) Para todo x tal que $x\neq 5$ y $x\neq -5$.

2) Factorice y simplifique las siguientes expresiones, indicando las condiciones que deben cumplirse para que la simplificación sea válida:

a) $\dfrac{5x^2-5}{x+1}$ b) $\dfrac{a^2x-a^2b}{ax^2-ab^2}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ d) $\dfrac{x^2-36}{x^3-216}$

e) $\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ f) $\dfrac{(4x^2-9a^2)(18x-12)}{(2x-3a)(12x-8)}$

g) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{a^2-2ab+b^2}$ h) $\dfrac{x^3-8}{2x^2-8x+8}$

RESPUESTAS

a) $5(x-1)$, si $x\neq -1$

b) $\dfrac{a}{x+b}$, si $x\neq b$ y $x\neq -b$

c) $\frac{x+1}{x}$, si $x \neq 1$ y $x \neq 0$

d) $\frac{x+6}{x^2+6x+36}$, si $x \neq 6$

e) si $x \neq 4$

f) $\frac{3}{2}(2x+3a)$, si $x \neq \frac{3}{2}a$, $x \neq \frac{2}{3}$

g) $\frac{x+y}{a-b}$, $a \neq b$

h) $\frac{x^2+2x+4}{2(x-2)}$, si $x \neq 2$

3) Señale la respuesta correcta y justifique:

i) $\frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2} = \frac{x-2a}{x+2a}$

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$

b) Si $x \neq 2a$

c) Si $x \neq -2a$

d) Si $x \neq 2a$ o $x \neq -2a$

e) Si $x \neq 2a$ y $x \neq -2a$

ii) $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+2x+4$

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$

b) Si $x \neq -2$

c) Si $x \neq 8$

d) Si $x \neq 2$

e) Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$

4) Operando sólo con el primer miembro verifique:

$\frac{x^4-3x^2+5x-3}{x-1} = x^3+x^2-2x+3$; si $x \neq 1$

$\frac{3x^5+10x^4+4x^3+x^2-x+15}{x+3} = 3x^4+x^3+x^2-2x+5$; si $x \neq -3$

$\frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1$; si $x \neq -1$

2. Operaciones con expresiones racionales fraccionarias

Las reglas son las mismas que para las operaciones con números racionales.

2.1 Adición y sustracción.

Si los denominadores son iguales el resultado se obtiene sumando (o restando) los numeradores y se conserva el denominador común.

EJEMPLOS

a) $\frac{3x+5}{2x-2}+\frac{5x-6}{2x-2}=\frac{3x+5+5x-6}{2x-2}=\frac{8x-1}{2x-2}$; $x\neq 1$

b) $\frac{4-6x}{x-3}+\frac{5+x}{3-x}$ En este ejemplo se puede multiplicar por *(-1)* el numerador y el denominador del segundo sumando para obtener una expresión equivalente con denominadores iguales:

$$\frac{4-6x}{x-3}+\frac{5+x}{3-x}=\frac{4-6x}{x-3}+\frac{-1(5+x)}{-1(3-x)}$$

$$=\frac{4-6x}{x-3}+\frac{-5-x}{x-3}$$

$$=\frac{4-6x-5-x}{x-3}$$

$$=\frac{-7x-1}{x-3}$$, y también = $-\frac{7x+1}{x-3}$; $x\neq 3$

Si los denominadores no son iguales, se reducen a mínimo común denominador, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, como en el caso de la suma de fracciones:

EJEMPLO

$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$ Buscamos el mínimo común denominador que es el mín. múltiplo común de los denominadores. $x^2-4=(x+2)(x-2)$ y procedemos como en una suma de fracciones numéricas.

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)+(x-6)}{(x-2)(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2 \ y \ x\neq 2$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2-(x^2-2x+x-2)+x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2-x^2+x+2+x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3}{(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 2$$

2.2. Multiplicación

Se factorizan los numeradores y los denominadores de las expresiones fraccionarias y si es posible se simplifica.

EJEMPLOS

a) $$\frac{x-1}{x+2}.\frac{x^2-4}{x^2-x} = \frac{x-1}{x+2}.\frac{(x-2).(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 0; x\neq 1$$

b) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}.\frac{x-2}{x^2-3x} = \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)}.\frac{x-2}{x(x-3)} = \frac{x-3}{x(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 0; x\neq 2; x\neq 3$$

2.3. División

Se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLOS

a) $$\frac{x-1}{x+5}:\frac{x^2-x}{x^2-25} = \frac{x-1}{x+5}.\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x-5}{x} \quad ; \ x\neq -5; x\neq 0; x\neq 1; x\neq 5$$

b) $$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}\right):\frac{x^2-4x+4}{x-1} = \frac{2(x-1)-x}{(x+1)(x-1)}.\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x-2-x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x-2)}, \; x \neq \pm 1 \; y \; x = 2$$

EJERCICIOS

1) Sume y, si es posible, simplifique el resultado:

a) $\frac{x}{8}+\frac{5x}{8}-\frac{2x}{5}$ R: $\frac{7}{20}x$

b) $\frac{2x}{3a}-\frac{5x}{2a}+\frac{3x}{4a}+x$ R: $\frac{-13x+12ax}{12a}$

c) $x+\frac{1}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x}$ R: $\frac{x^2+x+2}{1-x^2}$

d) $\frac{1}{8-8x}-\frac{1}{8+8x}+\frac{x}{4+4x^2}$ R: $\frac{x}{2\left(1-x^4\right)}$

e) $\frac{x-2a}{x+2a}-\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{8ax}{x^2-4a^2}$ R: $\frac{2x+4a}{x-2a}$

f) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b+a}$ R: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

g) $\frac{4x-3b}{2x}-2+\frac{2x+b}{3x}$ R: $\frac{4x-7b}{6x}$

2) Verifique: $\frac{a-2}{2a+2}-\frac{3a-4}{3a+3}+\frac{4a-1}{6a+6}=\frac{1}{6}$

3) Diga si el resultado de $\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a+b}+\frac{a^2(b-a)}{b(a-b)(a+b)}$ es alguna de las siguientes fracciones:

$\frac{a+b}{b}$ $\qquad$ $\frac{-b}{a+b}$ $\qquad$ $\frac{b}{a+b}$

4) Multiplique:

$$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)\frac{x^4}{x^4+1}$$ R: $\left(x^6-1\right)x$

$$\frac{10x-20}{x^2}\frac{3x^2}{5}\frac{20}{x^2-4x+4}$$ R: $\frac{120}{x-2}$

$$\frac{x^2-1}{3}\frac{6a}{x+1}\frac{x^2-2x+1}{10a}$$ R: $\frac{(x-1)^3}{5}$

$$\frac{ab}{a^2+b^2+2ab}\frac{2a+2b}{a+b}$$ R: $\frac{2ab}{(a+b)^2}$

$$\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)$$ R: 3

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)$$ R: $\frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{ax}{a+2x}\right)$$ R: $\frac{a-2x}{ax}$

5) Divida:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ R: $x^2-\frac{1}{x}$

b) $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)$ R: $\frac{x^2-a^2}{ax}$

c) $\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)$ R: $\frac{x}{x-2}$

d) $\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right):\left(\frac{x^2}{x^3-a^2x}\right)$ R: 2

6) Señale con una X la respuesta correcta:

$$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}\right):\frac{x^2-4x+4}{x-1}=$$

a) $\dfrac{-1}{x^2-x-2}$ ( )

b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ( )

c) $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ ( )

d) ninguna de las anteriores ( )

TEMA 5: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son ecuaciones de primer grado las que pueden expresarse en la forma $ax+b=0$ con $a \neq 0$.

Para hallar la única raíz hacemos:

$$ax=-b \quad , \quad x=-\frac{b}{a}$$

EJEMPLOS

a) $3x+5=0$

SOLUCIÓN

Despejamos x: $3x=-5$. Luego $x=-\dfrac{5}{3}$

Verificación: $3\left(\dfrac{-5}{3}\right)+5=-5+5=0$

b) $6x=9$

SOLUCIÓN

$x=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$ (Verifique)

Observaciones: si se tiene la ecuación $3x-3=2\,(x-1)+x$, para resolver hacemos:

$$3x-3=2x-2+x$$

$$3x-2x-x=-2+3$$

$$0x=1$$

Esto es un absurdo, pues para cualquier número x, es $0x=0$. Se dice, entonces, que la ecuación no tiene solución.

c) Dada: $3\,(2x-1)-x+4=5x+1$, hacemos:

$$6x-3-x+4=5x+1$$
$$6x-x-5x=1+3-4$$
$$0x=0$$

Esta igualdad se verifica para todo valor de x. Se dice que la dada es una identidad.

EJERCICIOS

1) Sin resolver la ecuación, determine cuáles de los números que se dan son soluciones de la ecuación correspondiente.

los números $\frac{12}{5}; \frac{4}{5}; 7$ de $3x-4=-2x+8$ R: $\frac{12}{5}$

los números $\frac{1}{3}; 3; 5$ de $4(-x+5)-3x+1=0$ R: 3

los números $0; 3; \frac{1}{5}$ de $-5(x+8)+2=-38-3x-2x$ R: todos

los números $0; -1; 3$ de $13x-2(5x+2)=2(x+2)+x$ R: ninguno

2) Resuelva y verifique:

a) $-3(x+5)-4x=7x+4$

b) $-3x+9-7x=4(-x+8-3x)$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{3}=\frac{x}{3}-\frac{-2x+9}{4}$

d) $4(x-2)+\frac{1}{2}=\frac{-1}{3}(x+2)-\frac{14}{3}$

e) $\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{5}{x^2-9}$

f) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$

RESPUESTAS:

a) $x=-\frac{19}{14}$

b) $x=\frac{23}{6}$

c) No tiene solución

d) $x=\frac{1}{2}$

e) $x=-\frac{2}{9}$

f) $x=2$

3) Resuelva los siguientes problemas. Plantee, para hacerlo, una ecuación de primer grado en una variable.

a) La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuáles son esos números? R: 25, 27, 29

b) Encuentre cuatro números consecutivos, tales que el primero más el cuádruplo del tercero, menos el doble del cuarto, sea igual a 95.
R: 31, 32, 33, 34

c) En el triángulo ABC, A tiene $54°$ y B supera a C en $23°$. Encuentre el valor de B y C.

R: $B = 74° \, 30'$; $C = 51° \, 30'$.

d) Si a un número se lo multiplica por $1/5$ y se le suma $3/4$, se obtiene el mismo resultado que si a ese número se le resta $9/20$. ¿Cuál es el número?

R: $3/2$

e) Encuentre el número por el cual se debe dividir 282 para que el cociente sea 13 y el resto 9.

R: 21

f) El perímetro de un rectángulo es de $318\ cm$. El largo supera al ancho en $11\ cm$. Calcule las dimensiones del rectángulo.

R: largo $85\ cm$; ancho $74\ cm$

g) El perímetro de un triángulo isósceles es de $2{,}57\ m$. Los lados iguales superan a la base en $28\ cm$. Calcule el valor de cada lado.

R: base $67\ cm$; lados $95\ cm$

h) Un artículo cuyo valor actual es de \$ 322, tuvo dos aumentos de precio; el primero del 12 % y el segundo del 15 %. Encuentre el valor original.

R: \$250

i) Se reparten \$ 22.500 entre tres personas. La segunda recibe el doble de la primera y la tercera un cuarto de lo que reciben las otras dos juntas. ¿Cuánto recibe cada una?

R: \$ 6.000, \$ 12.000 y \$ 4.500 respectivamente.

4) Resuelva y verifique su respuesta:

a) Se tienen dos calidades de leche: la entera y la descremada. La leche entera tiene 700 calorías por litro y la descremada 320 calorías por litro. ¿Qué cantidad de cada leche se debe mezclar para obtener un litro de leche semidescremada con 400 calorías por litro?

R: 0,79 litros de leche descremada y 0,21 litros de leche entera

b) Un alumno compró tres libros. El primero le costó \$ 175, el segundo \$89. Si en total pagó \$ 476, cuál es el costo del tercer libro?

R: \$ 212

c) Se tiene cierta cantidad de dinero. Con ella se compró una silla, gastando el 20% del mismo, luego se compró un tablero, gastando 1/5 del dinero que quedó. Al final quedan $ 512. ¿De cuánto dinero se disponía al principio?
R: $ 800

d) El perímetro de un campo rectangular es de 1.220 *m*. Si uno de los lados mide 150 *m* más que el otro, cuánto mide cada lado?
R: lado menor: 230 *m* ; lado mayor 380 *m*

e) Marcelo tiene el doble de la edad de Matías y Pablo tiene el triple de la edad de Marcelo. La suma de las edades de los tres es de 108 años. Determinar la edad de cada uno.
R: Matías 12 años, Marcelo 24 años y Pablo 72 años.

f) Por dos insumos informáticos se pagó $ 2050. El primer insumo costó $ 1.450 más que el segundo. ¿Cuánto costó cada insumo?
R: Primer insumo: $ 1750 ; segundo insumo: $ 300

g) Se realizaron tres análisis clínicos a un señor. En el primero los hematíes fueron 5.360.000 /ul ; en el segundo 5.002.000 /ul ; y perdió el el resultado del tercer análisis. Sabe que el promedio de los tres análisis fue de 5.111.000 hematíes /ul. ¿Cuál fue el resultado del tercer análisis?
R: 4.971.000 hematíes/ ul

h) El perímetro de un triángulo es de 209 cm. Uno de sus lados mide 20 cm. más que cada uno de los otros dos. ¿Cuánto mide cada lado?
R: lados iguales: 63 cm.; lado mayor: 83 cm.

i) La Facultad compró tres microscopios. Por el segundo pagó 12.500 dólares más que por el primero, y por el tercero 11.000 dólares más que por el segundo. En total pagó 291.000 dólares. ¿Cuánto pagó por cada microscopio?
R: 1º) 85.000 dólares ; 2º) 97.5000 dólares ; 3º) 108.500 dólares

TEMA 6: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la forma

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$$

Resolver el sistema consiste en encontrar los valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones. Dichos valores son las soluciones del sistema de ecuaciones.

Explicaremos mediante ejemplos algunos de los procedimientos usados para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Método de sustitución

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 3y = -14 \end{cases}$$

Despejamos *x* en la segunda ecuación: *x = 3y –14 (1)*

Reemplazamos *x* en la primera ecuación:

2(3y –14) – y = -3

6y –28 –y = -3

5y = 25

y = 5

Sustituimos este valor en *(1)*

x = 3.5 –14 ;   *x = 1*

La solución es *x = 1 ; y = 5*

Verificación: Para verificar se reemplazan los valores obtenidos en las dos ecuaciones, operando independientemente en cada miembro de la respectiva ecuación.

2x – y = 2.1 –5 = -3

x – 3y = 1 – 3.5 = -14

2. Método de reducción o de eliminación por sumas o restas

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 3y = -14 \end{cases}$$

Para eliminar *x* multiplicamos la segunda ecuación por *–2* y sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x + 6y = 28 \end{cases}$$

5y = 25   Luego *y = 5*

Reemplazamos el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema original para encontrar *x*:

x – 3.5 = -14   ;   *x = -14 + 15*   ;   *x = 1*

La solución es: *x = 1; y = 5.*   Resuelto el sistema, conviene siempre efectuar la verificación.

Sistemas consistentes e inconsistentes

Apliquemos el método de eliminación por sumas o restas para resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 10x - 6y = 4 \end{cases}$$ Multiplicamos la primera ecuación por (-2)

$$\begin{cases} -10x + 6y = 4 \\ 10x - 6y = 4 \end{cases}$$ Sumamos miembro a miembro y tenemos: 0 = 8

Este absurdo significa que el sistema no tiene solución. Decimos que es inconsistente o incompatible.

Sistemas determinados e indeterminados

Resolvemos el sistema por el método de eliminación:

$$\begin{cases} -x + 3y = -\frac{1}{4} \\ 2x - 6y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 6y = -\frac{1}{2} \\ 2x - 6y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ; sumamos: } \begin{cases} -2x + 6y = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Concluimos que las dos ecuaciones son equivalentes. El sistema es consistente e indeterminado: tiene infinitas soluciones que se encuentran dando un valor arbitrario a una de las variables y hallando el correspondiente de la otra.

$$-2x + 6y = -\frac{1}{2} \;;\quad 6y = 2x - \frac{1}{2} \;;\quad y = \frac{1}{6}\left(2x - \frac{1}{2}\right) \;;\quad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}$$

El conjunto de todas las soluciones se expresa: $S = \left\{x, y = \frac{1}{3}x - 12, con\ x \in \mathbb{R}\right\}$ en este caso, se dan valores reales a *x* y se obtienen los correspondientes de *y.*

Cuando la solución consiste en un único valor para cada una de las incógnitas, como ocurrió en el caso del primer sistema resuelto, se dice determinado.

EJERCICIOS

1) Resuelva por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x-5y-1=0 \\ x+3y+4=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -3x+\dfrac{9}{4}y=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x+y=1 \\ -5x+8y=7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y=-\dfrac{1}{2} \\ -5x+8y=8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{9} \\ -\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Ayuda para la resolución del ejercicio f:

Pueden efectuarse las sustituciones: $\dfrac{1}{x}=t$; $\dfrac{1}{y}=u$, obteniéndose el sistema

$\begin{cases} t+2u=\dfrac{5}{9} \\ -4t+6u=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ Se encuentra: $t=\dfrac{1}{3}$; $u=\dfrac{1}{9}$ y la solución es *x = 3 ; y = 9*

RESPUESTAS

a) $x=-1;\ y=-1$

b) $x=4;\ y=1$

c) $x=\dfrac{1}{2};\ y=4$

d) $x=-3;\ y=-1$

e) $x=-4;\ y=-\dfrac{3}{2}$

f) $x=3;\ y=9$

2) Resuelva los sistemas usando el método de reducción por sumas o restas.

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 10x-6y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ 4x+3y-4=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y=-8 \\ 9x-5y=-25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x-5y-1=0 \\ x+3y+4=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ 3x+6y=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1 \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=-4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x-y=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{2}y-1=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 0,2x+0,3y=0,75 \\ -0,4x-4y=-3,2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{5}{3} \\ 2x-4y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$

RESPUESTAS

a) $x=1;\ y=4$

b) Sistema inconsistente

c) $x=-\dfrac{1}{2}$; $y=-\dfrac{7}{2}$

d) $x=1;\ y=0$

e) $x=-\dfrac{25}{2}$; $y=-14$

f) $x=-1;\ y=-1$

g) Sistema inconsistente

h) $x=-\dfrac{1}{2}$; $y=-\dfrac{1}{3}$

3) Señale la respuesta correcta: *x = -2* , *y = 3* es la solución del sistema:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x+y=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ -x-2y=-8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+4y=14 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=-5 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$

e) de ninguno de las anteriores

4) La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ -3x+10y+7=0 \end{cases}$ es:

a $x = \frac{1}{2}$; $y = 4$

b) $x = -4$; $y = \frac{1}{2}$

c) $x = 6$; $y = \frac{1}{2}$

d) $x = 4$; $y = \frac{1}{2}$

e) ninguna de las anteriores

5) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y sólo si tienen la misma solución.

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

e) de ninguno de las anteriores

6) Plantee los problemas siguientes mediante sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resuelva y verifique las soluciones.

EJEMPLO

Encuentre la fracción tal que sumando 9 al numerador y 2 denominador se obtiene 3, y multiplicando por 10 al numerador y por 4 al denominador se obtiene 6.

SOLUCIÓN

La fracción que se busca será $\frac{x}{y}$, tal que $\begin{cases} \frac{x+9}{y+2} = 3 \\ \frac{10x}{4y} = 6 \end{cases}$

Operando convenientemente se obtiene el sistema equivalente:

$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 10x - 24y = 0 \end{cases}$ La solución del sistema es: x =12 ; y = 5. La fracción que se busca es:

$\frac{12}{5}$ (Efectúe la resolución del sistema y verifique la respuesta)

PROBLEMAS

a) Encuentre dos números tales que su suma sea -56 y su diferencia 106.

R: 25 y (-81)

b) Dos números son tales que su suma es 140, el cociente y el resto de la división entre los mismos son, respectivamente, 1 y 38. ¿Cuáles son esos números?

R: 89 y 51

c) Encuentre los valores que deben tomar b y c en la ecuación $3x + by = c$, para que se verifique simultáneamente para $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = 2$; y para $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{6}{5}$

R: b = -5 y c = -9

d) El valor de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo supera al doble del otro en 10° . ¿Cuál es el valor de los ángulos agudos? Verifique su respuesta.

e) Un equipo de básquetbol anotó 108 puntos en un partido. Anotaron 2 veces y media más canastas que tiros libres. ¿Cuántas canastas y cuántos tiros libres hicieron? ¿Cuántos puntos anotaron de cada uno? (Las canastas valen 2 puntos, los tiros libres 1 punto y no hubo canastas de tres puntos)

R: 45 canastas y 18 tiros libres. 90 puntos por canastas y 18 por tiros libres.

f) En un teatro cobran $20 la entrada de los adultos y $ 12 la de los niños. Un día, abonaron su entrada 774 personas y se recaudaron $ 11256. ¿Cuántas entradas vendieron para adultos y para niños?

R: 528 niños y 246 adultos.

g) Encuentre dos números tales que su suma sea 106 y su diferencia 56.

R: 81 y 25

h) Dos números son tales que su suma es 140, el cociente y el resto de la división entre los mismos son, respectivamente, 1 y 38. ¿Cuáles son esos números?

R: 89 y 51

i) Encuentre los valores que deben tomar b y c en la ecuación $3x + by = c$, para que se verifique simultáneamente para $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = 2$; y para $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{6}{5}$.

R: b = -5 ; c = -9

j) El valor de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo supera al doble del otro en 10°. ¿Cuál es el valor de los ángulos agudos?

k) En un teatro cobran $ 20 la entrada de los adultos y $ 12 la de los niños. Un día abonaron su entrada 774 personas y se recaudaron $ 11.256. ¿Cuántas entradas vendieron para adultos y para niños?

R: 528 entradas para niños y 246 para adultos.

l) En un corral hay un cierto número de conejos y patos. En total hay 194 patas y 61 animales. ¿ Cuántos conejos y patos hay?

R: 25 patos y 36 conejos

m) Un productor agropecuario vendió soja a 27 dólares el quintal y maíz a 13 dólares el quintal. En total vendió 200 quintales y recibió 4.196 dólares. ¿Cuántos quintales de soja y de maíz vendió?

R: 114 quintales de soja y 86 quintales de maíz

n) Se compraron dos productos de diferente costo por un total de $ 510. El costo del mayor menos cuatro veces el costo del menor es de $ 10. ¿ Cuál es el costo de cada producto?
R: mayor: $ 410 ; menor: $ 100

o) Un empresario compró tres autos y dos camionetas en 79.000 dólares. Luego realizó una segunda compra de cinco autos y una camioneta, de los mismos modelos que los anteriores en 78.000 dólares. ¿Cuánto pagó por cada auto y por cada camioneta?
R: auto: 11.000 dólares; camioneta: 23.000 dólares

p) En el comedor de la Facultad hay 25 mesas y 120 sillas. Hay mesas con 6 sillas y otras con 4 sillas. ¿Cuántas mesas de cada tipo hay?
R: 10 mesas con 6 sillas y 15 con 4 sillas.

q) Un productor sembró trigo y lino. En total sembró 100 Ha., siendo la cantidad de hectáreas de trigo un 50% más que las de lino. ¿Cuántas Ha. sembró con cada cereal?
R: trigo: 60 Ha. ; lino: 40 Ha.

r) Un comerciante vendió equipos de soldaduras a $ 2.700 c/u y sierras a $ 1.800 c/u. En total vendió 85 equipos, recibiendo $ 207.000. ¿Cuántas soldaduras y sierras vendió?
R: soldaduras: 60 ; sierras: 25

s) En un garage hay motos y autos. Las motos con dos ruedas y los autos con cuatro. En total hay 80 vehículos y 274 ruedas. ¿Cuántas motos y autos hay en el garage?
R: motos: 23 ; autos: 57

t) En un análisis clínico la suma de los linfocitos y los monocitos es de 62% y la diferencia de linfocitos menos monocitos es de 36%. ¿Cuál es el porcentaje de linfocitos y de monocitos en el análisis?
R: linfocitos: 49% ; monocitos: 13%

u) Una placa radiográfica rectangular tiene un perímetro de 156 cm. y su largo es 6 cm. más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la placa?
R: largo: 42 cm. ; ancho 36 cm.

TEMA 7: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

1. Definición

Si a un polinomio de segundo grado lo igualamos a cero obtenemos una ecuación de segundo grado. Los ceros o raíces del polinomio son las raíces de la ecuación.

EJEMPLO

Si $P(x) = x^2 + 4x + 3$, los ceros son -3 y -1. Si escribimos $x^2 + 4x + 3 = 0$ tenemos una ecuación de segundo grado y sus raíces son -3 y -1.

Las ecuaciones de segundo grado en una variable son las que pueden expresarse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{, con } a \neq 0$$

Un polinomio de grado n tiene n ceros. Una ecuación polinómica de grado n tiene n raíces; si el grado de la ecuación es dos, tendrá dos raíces que podrán ser iguales o diferentes.

Polinomio de segundo grado: $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0;$

Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$

2. Cálculo de las raíces de ecuaciones incompletas

2.1. Ecuación incompleta de la forma $ax^2 = 0$. $a \neq 0$

Como $a \neq 0$, debe ser $x^2 = 0$. Luego $x_1 = x_2 = 0$.

Ejemplo: $-12x^2 = 0$ La solución es: $x_1 = x_2 = 0$.

2.2. Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$. $a \neq 0$

Hacemos $ax^2 = -c \; ; x^2 = -\frac{c}{a} \; ; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ejemplo: $4x^2 - 9 = 0$:

Despejamos x: $x^2 = \frac{9}{4}$; $x = \frac{\pm\sqrt{9}}{2}$. ; $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

2.3. Ecuación incompleta de la forma $ax^2+bx=0$.

Factorizamos: $x\left(ax+b\right)=0$.

Si un producto es cero, al menos uno de los factores debe ser cero. Una de las soluciones es $x_1=0$; la otra se encuentra anulando el segundo factor: $ax+b=0$, despejamos x y tenemos $x_2=-\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo: $5x^2+x=0$; extraemos el factor común: $x\left(5x+1\right)=0$

Una solución es $x_1=0$ y la otra: $5x+1=0 \Rightarrow 5x=-1$,entonces $x_2=-\dfrac{1}{5}$

3. Cálculo de las raíces de ecuaciones completas de segundo grado

3.1. Ecuación completa: $ax^2+bx+c=0$ (a, b y c son distintos de cero).

Dada una ecuación, se obtienen ecuaciones equivalentes efectuando las siguientes operaciones:

a) Multiplicando ambos miembros por un número distinto de cero.

b) Sumando un mismo número en ambos miembros.

c) Sumando y restando un mismo número en uno de los miembros.

Las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones. Para deducir la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado usaremos los recursos que hemos formulado.

Hacemos: $ax^2+bx=-c$ y multiplicamos ambos miembros por $1/a$, $\left(a\neq 0\right)$:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Sumamos a ambos miembros $\dfrac{b^2}{4a^2}$ a fin de obtener en el primer miembro un trinomio cuadrado perfecto: $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}=-\dfrac{c}{a}+\dfrac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{-4ac+b^2}{4a^2}$

Extraemos raíz cuadrada: $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Despejamos x: $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las raíces son: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

4. Discriminante de la ecuación

La expresión b^2-4ac es el discriminante de la ecuación.

Si el discriminante es igual a cero, la ecuación tiene dos raíces reales e iguales o coincidentes:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

Si el discriminante es mayor que cero, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, y si es menor que cero, la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

EJEMPLO

Resuelva la ecuación y verifique su respuesta: $2x^2-3x+1=0$

SOLUCIÓN

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}\ ;\ x=\frac{3\pm1}{4}\ ;\ x_1=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=1\ .$$

Las raíces son números reales.

ACTIVIDAD

Demuestre que las raíces de una ecuación completa reducida de la forma $x^2+bx+c=0$ (donde a = 1) pueden obtenerse mediante la fórmula $x=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$.

Ayuda: puede hacer a = 1 y usar la fórmula deducida anteriormente para resolver $ax^2+bx+c=0$)

EJEMPLOS

a) Resuelva $x^2-4x+1=0$

SOLUCIÓN

$x = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ Reemplazando: $x = 2 \pm \sqrt{4-1}$; $x = 2 \pm \sqrt{3}$

Las raíces son números irracionales: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

b) Resuelva: $y^2 + 6y + 11 = 0$

SOLUCIÓN

$$y = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \ ; \ y = -3 \pm \sqrt{9-11} \ ; \ y = -3 \pm \sqrt{-2}$$

$$y_1 = -3 - i\sqrt{2} \ ; \ y_2 = -3 + i\sqrt{2}$$

Las raíces son números complejos conjugados.

5. Ecuaciones fraccionarias que pueden resolverse mediante la fórmula cuadrática

EJEMPLO

Se trata de resolver la ecuación $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{7x+3}{x^2-1}$, con $x \neq -1; x \neq 1$

Podemos reducir a común denominador:

$$\frac{(3x+2)(x+1) + 2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7x+3}{(x+1)(x-1)}$$

"Eliminamos" los denominadores multiplicando ambos miembros por el denominador común:

Efectuando las operaciones en el numerador del primer miembro, se tiene:

$$5x^2 + 3x + 2 = 7x + 3$$
$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene: $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = 1$ esta última no es raíz de la ecuación dada. ¿Por qué?

Observación: Este método de resolución de ecuaciones fraccionarias puede conducir a la obtención de raíces que no satisfacen la ecuación original, llamadas raíces extrañas, debido a que se multiplican ambos miembros por una expresión variable, en el ejemplo por
(x - 1) (x + 1).

Siempre que se multiplique la ecuación por una expresión variable, es necesario verificar las soluciones en la ecuación original para desechar las posibles raíces extrañas.

Verificación: Para, $x=-\frac{1}{5}$ en el primer miembro se llega a $-\frac{5}{3}$ y en el segundo también a $-\frac{5}{3}$

El valor hallado es raíz de la ecuación original.

Si verificamos en la ecuación original haciendo *x = 1,* en el primer miembro se llega a $\frac{5}{0}+1$ y en el segundo a $\frac{10}{0}$. Esas expresiones carecen de sentido: el cociente por cero no está definido. Por simple inspección en la ecuación original se advierte que *x = 1* no es solución, y puede desecharse sin efectuar cálculos.

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique sus soluciones:

a) $5x^2-45=0$ b) $100x^2+20=0$ c) $5x^2-5=0$

d) $x^2+81x=0$ e) $-x^2+9x=5x$ f) $-3+12x^2=0$

g) $x^2+4x+1=0$ h) $2x+3=-4x^2$ i) $10x^2-13x-3=0$

j) $-6x^2+1-x=0$ k) $\frac{3}{x-2}=x$ l) $\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{x+1}{x-2}$

m) $\frac{x}{x-1}+\frac{4}{x+1}=2$ n) $\frac{1}{x-2}=1+\frac{2}{x^2-2x}$ ñ) $\frac{2x-3}{3x-2}=\frac{x-1}{2x}$

o) $\frac{2+x}{2-x}+\frac{2-x}{2+x}=2$

RESPUESTAS

a) $x_1=-3, x_2=3$

b) $x_1=-\frac{\sqrt{5}}{5}i,\ x_2=\frac{\sqrt{5}}{5}i$

c) $x_1=-1, x_2=1$

d) $x_1=0, x_2=-81$

e) $x_1=0, x_2=4$

f) $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}$

g) $x_1=-2-\sqrt{3};x_2=-2+\sqrt{3}$

h) $x_1=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{11}}{4},\ x_2=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{11}}{4}$

i) $x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{-1}{5}$

j) $-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

k) $3, -1$

l) 5 (2 no es solución porque se anula el denominador)

m) $\frac{5+\sqrt{17}}{2},\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

n) 1 (2 no es raíz ¿por qué?)

ñ) $2; -1$

o) $x_1=x_2=0$

2) Resuelva:

a) $x^2-4x+1=0$

b) $x^2-4x+13=0$

c) $x^2-4x-1=0$

d) $x^2-2x+2=0$

e) $x^2-8x+14=0$

f) $\frac{3}{x+5}=1-\frac{4}{x-5}$

RESPUESTAS

a) $2\pm\sqrt{3}$

b) $2\pm3\,i$

c) $2\pm\sqrt{5}$

d) $1\pm i$

e) $4\pm\sqrt{2}$

f) $-3; 10$

6. Factorización de una ecuación de segundo grado

Si las raíces de $ax^2+bx+c=0$ son x_1 y x_2, justifique que esa ecuación puede expresarse como un producto de tres factores: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

Asimismo, si son x_1 y x_2 los ceros de un polinomio ax^2+bx+c ese polinomio (o trinomio) puede expresarse: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - x - 10 = 0$ tiene raíces $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = 2$

Se factoriza: $3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x-2)$ *(verifique)*

EJERCICIOS

1) Factorice i) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ ii) $x^2 - 5x + 4 = 0$

2) Exprese como producto el trinomio $P(x) = x^2 - 6x + 5$

RESPUESTAS

a) i) $2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+4) = 0$ ii) $(x-1)(x-4) = 0$

b) $P(x) = (x-1)(x-5)$

7. Relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y sus raíces

Si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se verifica:

i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; ii) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Enuncie, con palabras, las expresiones i) y ii) y demuestre las propiedades enunciadas.

Ejemplos

1) Forme la ecuación de segundo grado cuyas raíces son 2 y (–5).

SOLUCIÓN

$$x_1 + x_2 = 2 + (-5) = -3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = 2(-5) = -10 = \frac{c}{a}$$

luego $b = 3a$; $c = -10a$ La ecuación es: $ax^2 + 3ax - 10a = 0$, $a\left(x^2 + 3x - 10\right) = 0$

Como a debe ser distinto de cero, debe ser $x^2 + 3x - 10 = 0$

VERIFICACIÓN

Para x = 2: $2^2+3\cdot 2-10=4+6-10=0$

Para *x* = -5: $(-5)^2+3(-5)+10=0$

Otra forma de verificar es resolviendo la ecuación obtenida.

OBSERVACIÓN

Si $a=1$, se tiene $x^2+bx+c=0$ y en tal caso resulta: $x_1+x_2=-b$; $x_1x_2=c$

2) Escriba la ecuación de segundo grado que tiene por raíces -1 y 7, y el coeficiente $a=8$.

SOLUCIÓN

La forma más sencilla de resolver este problema consiste en expresar la ecuación como un producto, para lo cual se tienen los datos necesarios:

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$; $8(x+1)(x-7)=0$

Efectuando las operaciones se obtiene la ecuación en la forma $8x^2-48x-56=0$

Otro procedimiento consiste en aplicar las propiedades de las raíces:

$$x_1+x_2=-1+7=6=-\frac{b}{a}\ ;\ 6=-\frac{b}{8}\ ;-b=48$$

$$x_1x_2=(-1)\cdot 7=-7=\frac{c}{a}\ ;\ -7=\frac{c}{8}\ ;\ c=-56$$ Luego $b=-48$ y $c=-56$

La ecuación es: $8x^2-48x-56=0$

Observación: en el primer miembro de la ecuación obtenida se tiene el factor común 8. Factorizamos y obtenemos $8(x^2-6x-7)=0$, igualdad que se cumple para x tal que $(x^2-6x-7)=0$ resolviendo esta ecuación se obtienen las raíces $x_1=-1$ y $x_2=7$.

Conclusión: para operar en forma más simple, cuando hay un factor común en la ecuación conviene dividir por dicho factor y las raíces que se obtengan serán también las raíces de la ecuación dada.

EJERCICIOS

Resuelva los siguientes problemas. Plantee la solución correspondiente aplicando ecuaciones cuadráticas y verifique sus resultados.

1) Forme las ecuaciones de segundo grado que cumplan las condiciones que se indican:

a) $a = -3$ y las raíces son -6 y 0.

b) Los coeficientes b y c son números enteros; las raíces son $-3/4$ y $-5/3$.

c) Las raíces son los inversos de las raíces de $12x^2 - x - 1 = 0$.

d) $a = 5$, una raíz es 0 y la otra es $1/2$.

2) Determine c en la ecuación $x^2 - 10x + c = 0$ de modo que una de sus raíces sea:

a) -1

b) b) 0

c) $5 - 2\sqrt{2}$

SOLUCIÓN DE A)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1\, x_2 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 + x_2 = 10 \\ -x_2 = c \end{cases} \quad , \quad x_2 = 11 \quad , \quad c = -11$$

$$\textit{la ecuación es } x^2 - 10x - 11 = 0 \qquad (\textit{verifique})$$

R: 2-c) c = 17, la ecuación: $x^2 - 10x + 17 = 0$

3) Determine b en la ecuación $2x^2 + bx + 5 = 0$ de modo que una de sus raíces sea:

a) $-\frac{5}{2}$

b) -1

c) $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

R: a) b = 7, la ecuación es $2x^2 + 7x + 5 = 0$; b) b = 7.

SOLUCIÓN DE C)

Si un número complejo es raíz, el complejo conjugado también lo es. Además: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \quad , \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_1 + x_2 = -3 \quad luego \ \frac{-b}{2} = -3 \Rightarrow b = 6$$

La ecuación es $2x^2 + 6x + 5 = 0$

4) Halle el valor (o los valores) que debe tomar k en la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$, de modo que: a) las dos raíces sean iguales; b) las raíces sean complejas; c) las raíces sean reales. R: a) $k = 9$, b) $k > 9$, c) $k < 9$

5) La suma de n números enteros positivos, a partir del número 1 (uno) puede encontrarse mediante la fórmula $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Encuentre cuántos números enteros positivos deben sumarse a partir del 1 para que la suma sea 6670.

R: 115 números.

6) El producto de dos números pares consecutivos es 624. Encuéntrelos.

R: 24 y 26

7) Determine el número que sumado a su inverso dé por resultado $\dfrac{82}{9}$.

R: $\dfrac{1}{9}$

8) Encuentre, si existe, el número tal que si se lo multiplica por *8* da el mismo número que se obtiene si a su cuadrado se le resta 65.

R: 13 y -5

9) La superficie de un triángulo rectángulo es $170\ cm^2$ y la suma de sus catetos es $37\ cm$. Halle las longitudes de los catetos.

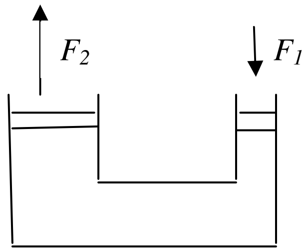
10) El largo de una piscina rectangular tiene 3 metros más que el doble del ancho. Si la superficie de la piscina es de 152 m^2, determine sus dimensiones.

R: ancho: 8 m, largo: 19 m.

11) Si los radios de los émbolos de una prensa hidráulica son: $r_1 = x - 2$ y $r_2 = 2\, r_1$.

¿Cuál es la razón entre las fuerzas aplicadas?

SOLUCIÓN



La prensa hidráulica es un mecanismo compuesto esencialmente por dos cilindros de distintas secciones y comunicados entre sí.

A cada cilindro se ajusta un émbolo y el recipiente se llena completamente de un líquido que puede ser aceite o agua y su funcionamiento es una aplicación del Principio de Pascal.

El Principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido incompresible en el interior de un recipiente de paredes indeformables se transmite íntegramente y con igual intensidad en todas direcciones y en todos los puntos del fluido.

Si sobre el émbolo chico se aplica una fuerza F_1, sobre el grande aparece una fuerza F_2.

La presión es la razón entre la fuerza y la superficie: $p = \dfrac{F}{S}$.

Entonces: $p = \dfrac{F_1}{S_1}$ y $p = \dfrac{F_2}{S_2}$ igualamos los segundos miembros: $\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2}$ y de aquí: $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{S_2}{S_1}$

$$S_2 = \pi\left[2(x-2)\right]^2 = 4\pi(x-2)^2 \ ; \ S_1 = \pi(x-2)^2$$

La razón entre las fuerzas es $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{4\pi(x-2)^2}{\pi(x-2)^2}$; $\dfrac{F_2}{F_1} = 4$ De aquí se obtiene que $\boxed{F_2 = 4\, F_1}$

RESPUESTA

La razón entre las fuerzas es 4. Ello significa que si se aplica una fuerza en el émbolo menor, la fuerza que se ejerce sobre el mayor es cuatro veces mayor. Observe que el problema plantea la situación en la cual el radio de uno de los émbolos es el doble del otro.

12) Si la razón entre las fuerzas F_2 y F_1 aplicadas a los émbolos de una prensa hidráulica es 9, y los radios son $r_2 = x$ y $r_1 = x + 6$, ¿cuál es el diámetro de cada émbolo?

SOLUCIÓN

$$\frac{\pi(x+6)^2}{\pi x^2} = 9; \quad \frac{x^2 + 12x + 36}{x^2} = 9 \ ; \quad x^2 + 12x + 36 = 9x^2; \quad x^2 + 12x + 36 - 9x^2 = 0$$

-8$x^2+12x+36=0$; podemos multiplicar por *(-1):* $8x^2-12x-36=0$, también podemos dividir por 4 y tenemos la ecuación de segundo grado equivalente: $2x^2-3x-9=0$

La fórmula para resolverla es: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.2.(-9)}}{2.2}\ ;\ x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}\ ;\ x=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}\ ;$$

$$x=\frac{3\pm 9}{4}\ ;\ x_1=-\frac{3}{2}\ ;\ x_2=3$$

La primera solución de la ecuación no conviene al problema por ser negativa. La solución es entonces *x = 3.*

Los radios son: $r_1=x+6$; $r_1=3+6=9$; y el diámetro serán respectivamente

$d_1=18$; $r_2=x$, luego $r_2=3; d_2=6$

R: Los diámetros de los émbolos son de 6 unidades y de 18 unidades.

8. Ecuaciones con radicales que pueden resolverse mediante ecuaciones cuadráticas

a) Sea la ecuación $2\sqrt{x+6}=x+3$. Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$4\left(\sqrt{x+6}\right)^2=(x+3)^2 \Rightarrow 4(x+6)=x^2+6x+9$$

$$4x+24=x^2+6x+9 \Rightarrow x^2+6x+9-4x+6=0$$

La ecuación es: $x^2+2x-15=0$

Se resuelve y se obtienen las raíces $x_1=3$; $x_2=-5$.

Es necesario comprobar si las soluciones de la ecuación cuadrática son soluciones de la ecuación original. Esa verificación debe realizarse porque al elevar los dos miembros de una ecuación a la misma potencia, se obtiene una ecuación que admite, al menos, todas las raíces de la primera, pero pueden aparecer raíces que no son soluciones de la ecuación original.

Para verificar se reemplaza en cada uno de los miembros y se comparan los resultados, tal como se explica a continuación:

Para $x_1=3$:

Primer miembro*:* $2\sqrt{3+6}=2\sqrt{9}=2\cdot 3=6$

Segundo miembro*:* $3+3=6$

Se verifica la igualdad.

Para $x_2=-5$:

Primer miembro*:* $2\sqrt{-5+6}=2\sqrt{1}=2\cdot 1=2$

Segundo miembro*:* $-5+3=-2$

No se verifica la igualdad. Luego la única solución es $x=3$.

b) Dada: $\sqrt{3x+3}=\sqrt{x+2}+1$, se eleva al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \Rightarrow 3x+3=\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\sqrt{x+2}\cdot 1+1^2$$

$$3x+3=x+2+2\sqrt{x+2}+1 \Rightarrow 3x+3-x-3=2\sqrt{x+2}$$

$2x=2\sqrt{x+2}$ Se dividen ambos miembros por 2:

$$x=\sqrt{x+2}$$

Se eleva al cuadrado: $x^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow x^2=x+2$

$$x^2-x-2=0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado, obteniéndose: $x_1=2$; $x_2=-1$.

Se verifica si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación original:

Para $x_1=2$: $\sqrt{3.2+3}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{2+2}+1=\sqrt{4}+1=2+1=3$ Luego *2* es solución.

Para $x_2=-1$: $\sqrt{3.(-1)+3}=\sqrt{-3+3}=\sqrt{0}=0$

$\sqrt{-1+2}+1=\sqrt{1}+1=1+1=2$

Como los resultados no son iguales, (-1) no es solución de la ecuación dada.

EJERCICIOS

1) Resuelva las ecuaciones:

a) $3+\sqrt{5-x}=x$

b) $x-1=\sqrt{x+5}$

c) $\sqrt{4x-3}=3\sqrt{4-x}$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1$

e) $x+3=\sqrt{3x+7}$

f) $\sqrt{2x}+\sqrt{3-x}=3$

RESPUESTAS

a) 4

b) –1 y 4 (pero -1 no es solución)

c) 3

d) 6

e) –2 y -1

f) 2

TEMA 8: LA FUNCIÓN LINEAL

1. Funciones

DEFINICIÓN

Una función es una correspondencia o relación entre dos conjuntos que a cada elemento del primer conjunto hace corresponder un único elemento del segundo conjunto.

El primer conjunto es el dominio de la función, el segundo, es el codominio.

Una función puede estar definida mediante una fórmula. Tal es el caso de una función polinómica $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x_1 + a_0$.

Si el polinomio tiene coeficientes reales y convenimos en que la variable *x* puede tomar cualquier valor real, queda definida una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el codominio es también ese conjunto.

Si *f* designa la función, x designa cualquier elemento del dominio e *y* al elemento que le corresponde en el codominio, se conviene en expresar esa correspondencia mediante y = f(x).

Sea por ejemplo el polinomio $f(x)=x^3+x-1$. Con *x* se designa a la variable independiente que puede tomar cualquier valor real: el Dominio de la función es el conjunto $\mathbb{R}$. Para cada valor de *x,* mediante la fórmula que define a la función, hallaremos su *imagen.* El conjunto de todas las imágenes es el recorrido o conjunto imagen de la función.

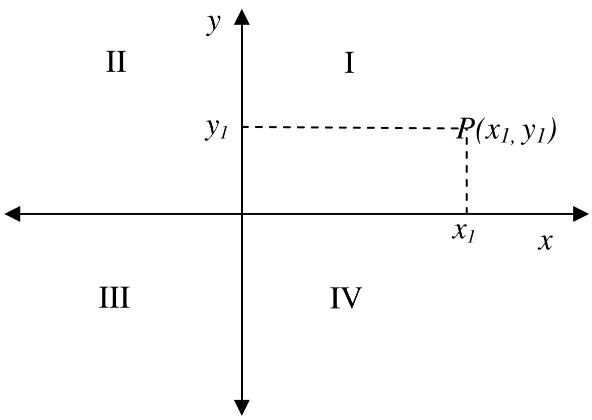
La imagen de (-1) es $f(-1)=-3$, la imagen de 0 es $f(0)=-1$, etc.

El conjunto imagen de f es el conjunto que tiene por elemento a y tal que

$y=x^3+x-1.$

Ello puede simbolizarse mediante: Dom f = $\mathbb{R}$, Im f = $\{y \in \mathbb{R}: y = x^3 + x - 1\}$

Las funciones reales de variable real pueden representarse en un sistema de ejes coordenados ortogonales que consisten en dos rectas perpendiculares que al cortarse dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes; el punto de intersección de los ejes es el origen de coordenadas.



Los puntos del plano que están en el eje *x* tienen ordenada *y = 0.* Los puntos pertenecientes al eje *y* tienen abscisa *x = 0* .

2. La función lineal en una variable

Una función polinómica de primer grado está definida por *f(x) = a x + b*, se llama función lineal y su gráfica es una recta.

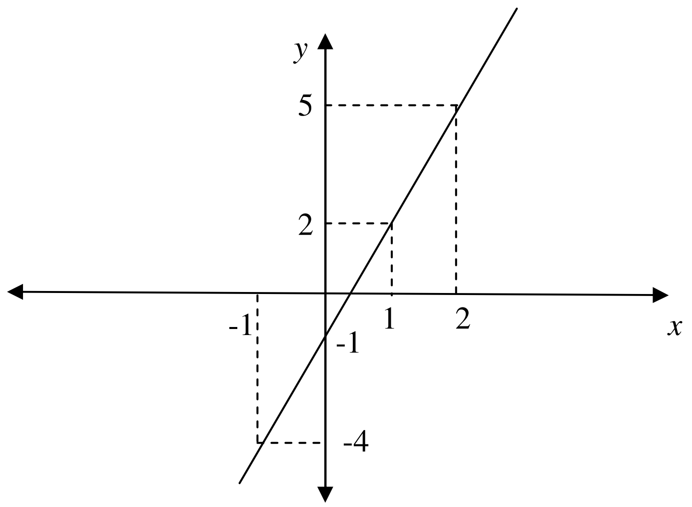
Esta es la llamada forma explícita de la ecuación de la recta. También puede expresarse en la forma y = mx + p.

EJEMPLO

1) Dada $f(x) = 3x - 1$, encontraremos las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, hallando los valores de *y* que correspondan a los de la variable independiente *x* anotados en la primera columna de la tabla.

x	$f(x) = 3x - 1$	$P\ (x,\ y)$
$x_1 = -1$	$y_1 = f(x_1) =$ -4	$P_1(-1, -4)$
$x_2 = 0$	$y_2 = f(x_2) =$ - 1	$P_2(0, -1)$
$x_3 = 1$	$y_3 = f(x_3) =$ 2	$P_3(1, 2)$
$x_4 = 2$	$y_4 = f(x_4) = 5$	$P_4(2, 5)$

1) Represente los puntos de la tercera columna en un sistema de coordenadas ortogonales y verifique que ellos están alineados, es decir, pertenecen a una recta.



Un punto pertenece a una recta, si sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta. Ello significa que al reemplazar las variables x e y por las coordenadas del punto, la ecuación se transforma en una igualdad.

2) A partir de los datos de la tabla de valores encuentre las razones siguientes, y extraiga conclusiones:

i) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ii) $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ iii) $\dfrac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$

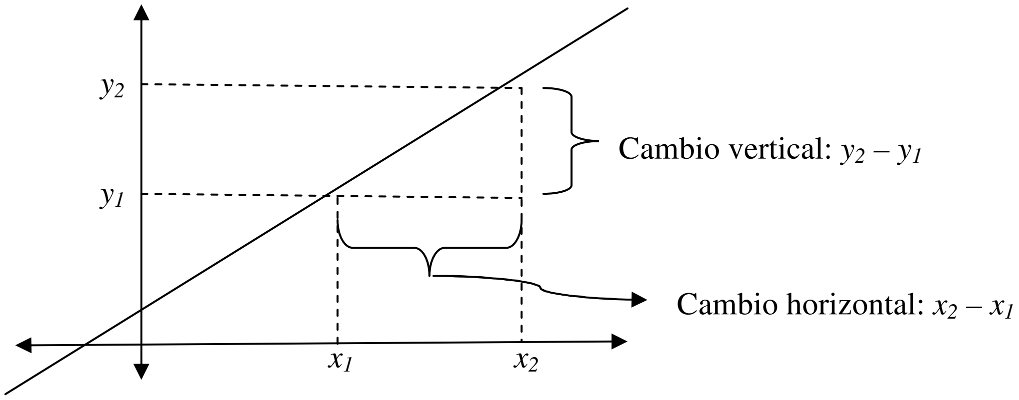
iv) $\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ v) $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ vii) $\dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$

viii) $\dfrac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4}$

La constante obtenida al comparar las razones entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa es la “pendiente” o “coeficiente angular” de la recta. En el ejemplo es $m = 3$.

La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{cambio en } y\,(\text{cambio vertical})}{\text{cambio en } x\,(\text{cambio horizontal})}$$



Encuentre analíticamente (es decir, efectuando los cálculos convenientes) y verifique en la gráfica las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados.

La ordenada del punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas se llama “ordenada al origen”. En el ejemplo el punto es $(0,-1)$, la ordenada al origen es p = -1.

La abscisa al origen se encuentra haciendo y = 0.

$3x-1=0$; $3x=1$; $x=\frac{1}{3}$ es la abscisa al origen. El punto de la recta es $\left(\frac{1}{3},0\right)$

EJERCICIOS

1) Señale con una x en ( ) las funciones lineales y dé la pendiente y la ordenada al origen.

a) $f(x)=-4x+\frac{1}{2}$ ( )

b) b) $y=5x+4$ ( )

c) $y=\frac{4}{x}-6$ ( )

d) d) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{7}$ ( )

e) $y=-2x^2+5x-3$ ( )

f) f) $y=-6+\frac{8}{5}x$ ( )

2) Determine analíticamente si el punto P_0 pertenece a la recta R.

a) $P_0\ (-1, 2)$; $R: y=-x+3$ b) $P_0\ (0, -2)$; $R: y=-x+2$

c) $P_0\ (-2, 1)$; $R: y=3x+7$ d) $P_0\ (-1/2, -2)$; $R: y=-x-\dfrac{5}{2}$

RESPUESTAS

1) a) $m=-4,\ p=1/2$;) $m=5,\ p=4$; c) no es una función lineal.

d) $m=-1/2,\ p=4/7$; e) no es una función lineal. f) $m=8/5,\ p=-6$

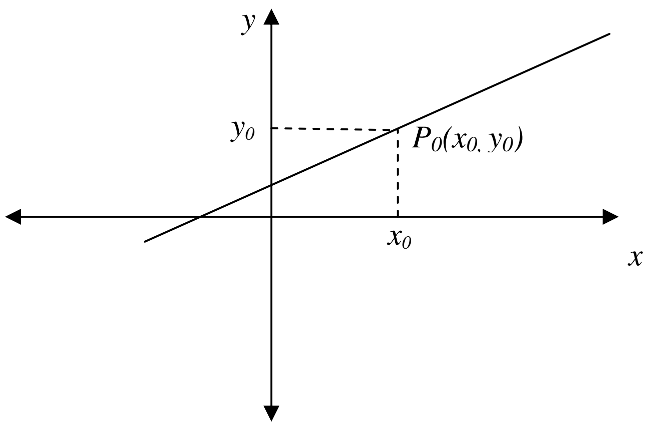
2) a) El punto no pertenece a la recta. b) El punto no pertenece a la recta.

c) El punto pertenece a la recta. d) El punto pertenece a la recta.

2.1. Forma punto - pendiente de la ecuación de una recta

Encontremos la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto $P_0\ (x_0,\ y_0)$.

La ecuación de la recta es: $y = mx + p\ \ (1)$



$P_0\ (x_0,\ y_0)$ pertenece a la recta, luego:

$$y_0 = mx_0 + p$$.

Despejamos *p:* $p = y_0 - mx_0\ \ (2)$

Reemplazando (2) en (1):

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)\ (3)$$

Puede obtenerse la misma ecuación restando las dos primeras expresiones. Para cada valor real de m, se tendrá una recta a la cual pertenece el punto P_0.

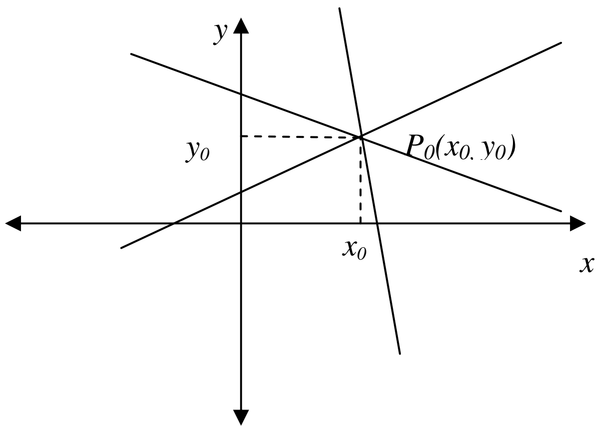
EJEMPLO

La ecuación de la recta de pendiente 4 y que pasa por el punto *(-2 , 7)* es

y – 7 = 4 (x – (-2)) ; *y – 7 = 4 (x + 2)* *y – 7 = 4 x + 8* ; *y = 4 x + 8 + 7* ; *y = 4 x + 15*

Por un punto pasan infinitas rectas. A la ecuación $y - y_0 = m\,(x - x_0)$ se la llama ecuación del haz de rectas que pasan por *el punto* $P_0\,(x_0,\, y_0)$. También ecuación de la familia de rectas que pasan por…

También se la llama “ecuación de la familia de rectas que pasan por $P_0\,(x_0,\, y_0)$.



EJEMPLO

La ecuación del haz de rectas que pasan por el punto (-1 , 5) es *y – 5 = m (x + 1)*

Para cada valor de *m* se tendrá la ecuación de una de las infinitas rectas que pasan por (-1 , 5).

EJERCICIOS

1) Escriba la ecuación del haz de rectas que pasan por P_0.

a) $P_0\,(-1, -5)$ b) $P_0\,(0, -3)$

c) $P_0\,(0, 0)$ d) $P_0\,(-5/3, -3/5)$

2) Exprese la ecuación de la recta que pasa por P_0 y tiene pendiente m. Represente la recta gráficamente.

a) $P_0\,(-1, 4)$; $m = -2$ b) $P_0\,(0, -6)$; $m = -1/3$

c) $P_0\,(-2, 0)$; $m = -1$ d) $P_0\,(0, 0)$; $m = -3/4$

e) $P_0\,(0, 0)$; $m = 1$ f) $P_0\,(-3, -1)$; $m = 1/5$

RESPUESTAS

1) a) $y+5=m(x+1)$; b) $y+3=mx$;

c) $y=mx$; d) $y+\frac{3}{5}=m\left(x+\frac{5}{3}\right)$

2) a) $y=-2x+2$; b) $y=-\frac{1}{3}x-6$; c) $y=-x-2$;

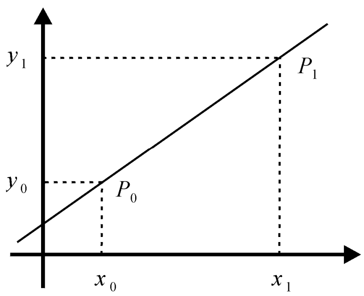
d) $y=-\frac{3}{4}x$; e) $y=x$; f) $y=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$

2.2. Ecuación de la recta determinada por dos puntos

Por un punto pasan infinitas rectas. Dos puntos determinan una recta a la cual pertenecen. Se quiere encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos $P_0\,(x_0,\,y_0)$ y $P_1\,(x_1,\,y_1)$.

La ecuación del haz de rectas que pasan por $P_0(x_0,y_0)$ es $y-y_0=m\,(x-x_0)$ (1). Determinaremos la pendiente *m.*

Como los puntos $P_0\,(x_0,\,y_0)$ y $P_1\,(x_1,\,y_1)$ pertenecen a la recta R, sus coordenadas satisfacen la ecuación: $y=mx+p$.



$$P_1 \in R \Rightarrow y_1 = mx_1 + p$$

$$P_0 \in R \Rightarrow y_0 = mx_0 + p$$

Restando miembro a miembro: $y_1 - y_0 = mx_1 + p - (mx_0 + p)$

$y_1 - y_0 = mx_1 + p - mx_0 - p$; $y_1 - y_0 = mx_1 - mx_0$

Factorizando el segundo miembro: $y_1 - y_0 = m\,(x_1 - x_0)$, luego $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ (2)

Reemplazando (2) en *(1)* se tiene la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \quad \text{También puede expresarse:} \quad \frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación de la recta determinada por P_0 y P_1:

a) $P_0\ (0,-2);\ P_1\ (6,0)$ b) $P_0\ (0,0);\ P_1\ (-3,5)$ c) $P_0\ (2,3);\ P_1\ (1,2)$

d) $P_0\ (6,0);\ P_1\ (0,2)$ e) $P_0\ (-2,3)\ ;\ P_1\ (3,5)$

2) Halle los puntos de intersección de la recta R con los ejes coordenados.

a) $R)\quad y=4x+5$ b) $R)\quad y=-5x-7$

c) $R)\quad y=-x+4$ d) *R) y = x*

RESPUESTAS

1) a) $y=\frac{1}{3}x-2$; b) $y=-\frac{5}{3}x$; c) $y=x+1$; d) $y=-\frac{1}{3}x+2$; e) $y=\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}$; $y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}$

2) a) $(0;5), (-\frac{5}{4};0)$; b) $(0;-7), (-\frac{7}{5};0)$; c) $(0;4), (4;0)$; d) $(0;0)$

2.3. Forma implícita de la ecuación de la recta

Partimos de la ecuación en forma explícita: $y=mx+p$. Trasponemos: $y-mx-p=0$. Ordenamos: $-mx+y-p=0$.

Hemos obtenido una ecuación equivalente a la dada, en la cual el segundo miembro es cero, y en el primer miembro figuran un término en x, un término en y, y un término independiente p. Puede decirse que es una ecuación de la forma: $a\,x+b\,y+c=0$

Esta ecuación lineal en dos variables es la forma implícita de la ecuación de la recta en el plano. a, b y c son constantes; a y b no simultáneamente nulas.

EJERCICIOS

1) Escriba en forma implícita:

   a) $y = -3x + 8$ b) $y = 9x - 6$

2) Escriba en forma explícita:

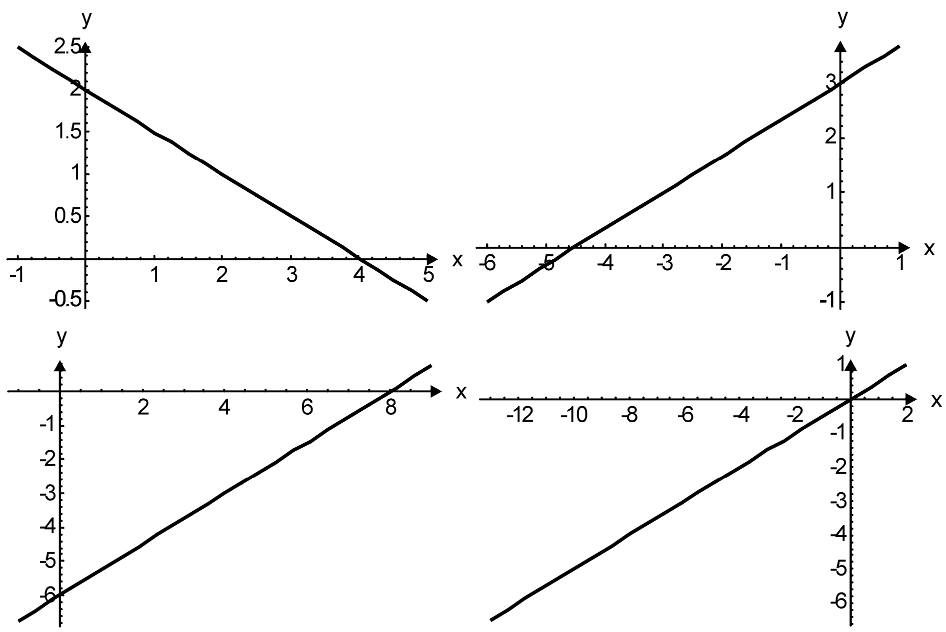
   a) $ax + by + c = 0$ b) $3x - 4y - 8 = 0$

   c) $4x + y - 1 = 0$ d) $-x + y = 0$

3) Represente las rectas de los ejercicios 1) y 2).

4) Analice las gráficas y exprese las ecuaciones de las rectas en:

   a) forma implícita b) forma explícita.



5) La ecuación de una recta es $ax + by + c = 0$. Explique cuál es la característica de la recta si: a) $a = 0$; b) $b = 0$; c) $a = c = 0$; d) $b = c = 0$.

RESPUESTAS

1) a) $3x + y - 8 = 0$ b) $9x - y - 6 = 0$

2) a) $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ b) $y = \frac{3}{4}x + 2$ c) $y = -4x + 1$ d) $y = x$

3)

4) $x+2y-4=0$;

$y=-\frac{1}{2}x+2$;

$3x-5y+15=0$;

$y=\frac{3}{5}x+3$

$3x-4y-24=0$; $y=\frac{3}{4}x-6$

$x-2y=0$; $y=\frac{1}{2}x$

5) a) la recta es paralela al eje *x* b) la recta es paralela al eje y.

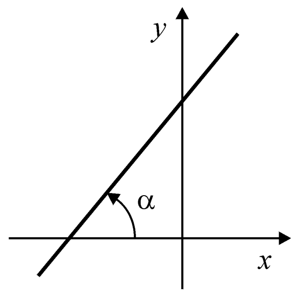
c) la recta es el eje *x.* d) la recta es el eje *y.* $y=\frac{1}{2}x$

2.4. Inclinación de una recta

Se llama inclinación de una recta al menor ángulo positivo determinado por el eje de abscisas orientado en el sentido positivo y la recta.

Ese ángulo siempre está comprendido entre 0^0 y 180$180^0$.

$$0º \leq \alpha \leq 180º$$



La pendiente de una recta es igual a la tangente trigonométrica de su inclinación: $m = tg\ (\alpha)$.

Distintas posiciones de una recta en el plano – signos de la pendiente y la ordenada al origen

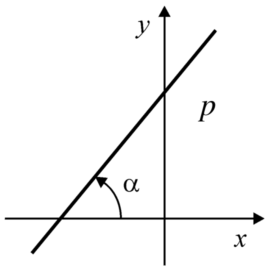


Figura 1

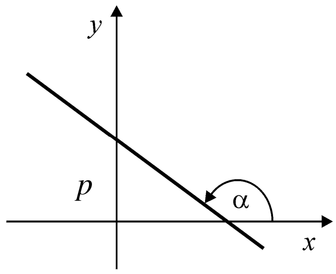


Figura 2

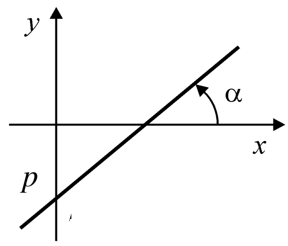


Figura 3

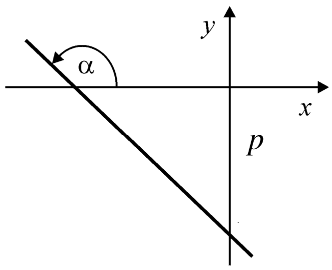


Figura 4

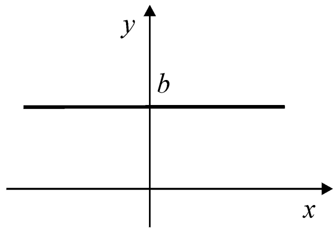


Figura 5

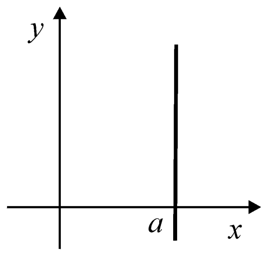


Figura 6

R: Figura 1: $\alpha < 90^{\circ} \Rightarrow m > 0;\ p > 0$

Figura 2: $\alpha > 90^{\circ} \Rightarrow m < 0;\ p > 0$

Figura 3: $\alpha < 90^{\circ} \Rightarrow m > 0;\ p < 0$

Figura 4: $\alpha > 90^{\circ} \Rightarrow m < 0;\ p < 0$

Figura 5: Recta paralela al eje x . $\alpha = 0$; tg $\alpha = 0$. La ecuación es $y = p$

Figura 6: Recta paralela al eje y . $\alpha = 90^{\circ}$, la tangente de un ángulo de 90^{0} no existe. La ecuación es $x = a$

2.4.1. Rectas paralelas y perpendiculares

1) Una recta pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es 2.

   a) Pruebe que si $P(x,\ y)$ pertenece a la recta, se verifica: $y = 2x$.

   b) Represente esa recta, y , en el mismo sistema de coordenadas, las rectas:

   $R_1 : y = 2x - 1 \qquad R_2 : y = 2x + 1 \qquad R_3 : y = 2x + 2$

   c) Compare las ecuaciones y las gráficas. Extraiga conclusiones.

RESPUESTA

Las ecuaciones tienen la misma pendiente $\mathrm{m} = 2$

PROPIEDAD

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

2) a) Represente en un mismo sistema de coordenadas los pares de rectas:

i) $R_1 : y = -2x + 1;\ R_2 : y = \dfrac{1}{2}x$

ii) $R_1 : y = 3x - 1;\ R_2 : y = -\dfrac{1}{3}x + 2$

iii) $R_1 : y = 4x + 1;\ R_2 : y = -\dfrac{1}{4}x - 2$

iv) $R_1 : y = x - 3;\ R_2 : y = -x + 2$

b) Compare las gráficas y extraiga conclusiones.

RESPUESTA

Las rectas son perpendiculares y la pendiente de una es el opuesto del inverso de la pendiente de la otra.

PROPIEDAD

Dos rectas no paralelas a los ejes coordenados son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una es el opuesto del recíproco de la pendiente de la otra.

Si la pendiente de una es m_1 $y\, la\ de\, la\ otra\ es\ m_2\, ,debe\ ser\ m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación de la recta a la cual pertenece P_0 y es paralela a R .

a) $P_0\ (-1, 2);\ R : y = -3x + 1$ b) $P_0\ (0, 0);\ R : y = 3x - 4$

c) $P_0(3, -1);\ R$: $y = -x+3$ d) $P_0\ (0, -3);\ R : y = 2x + 4y - 2$

2) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a R , con los datos del ejercicio 1.

3) Complete las proposiciones:

"Las rectas $y = m_1 x + p_1$ e $y = m_2 x + p_2$ son paralelas si y sólo si ...."

"Las rectas $y = m_1 x + p_1$ e $y = m_2 x + p_2$ son perpendiculares si y sólo si ...."

4) Encuentre la ecuación de la recta R , tal que:

a) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(-1, 8)$.

b) Tiene pendiente 4 y corta al eje x en el punto de abscisa 3.

c) Pasa por el punto $(-1/2, 1/2)$ y es paralela a la recta determinada por $(-2, 4)$ y $(4, 6)$.

d) La ordenada al origen es -3 y es perpendicular a la recta que une los puntos $(-2, -1)$ y $(2/3, 0)$.

e) Pasa por $(-2, 5)$ y es paralela a la recta $-x+4y-3=0$.

f) Es perpendicular a la recta $4x-y=0$, por el punto $(-2, 5)$.

RESPUESTAS

1) a) $y=-3x-1$ b) $y = 3x$ c) $y=-x+2$

d) $y=\frac{1}{2}$ e) $y=-\frac{1}{2}x-3$

2) a) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$; b) $y=-\frac{1}{3}x$; c) $y=x-4$; d) $y=2x-3$

3) a) $m_1=m_2$; $b)\ m_1=-\frac{1}{m_2}$

4) a) $y=-2x+6$ b) $y=4x-12$ c) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ d) $y=-\frac{8}{3}x-3$

e) $y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{2}$ f) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$ g) $y=-3$ h) $x=2$

5) a) $y=\frac{5}{7}x+\frac{5}{2}$ b) $m=\frac{5}{7}$ c) $p=\frac{5}{2}$ d) no, en los tres casos

e) $y=\frac{5}{7}x-3$ f) $y=-\frac{7}{5}x-3$

6) Dados los puntos $A\,(1, 1)$; $B\,(2, 4)$ y $C\,(4, 6)$, encuentre el punto D tal que el $ABCD$ sea un paralelogramo. Verifique que los lados opuestos son paralelos y represente el paralelogramo en un sistema de coordenadas.

R: *D* (3; 3)

7) Encuentre la intersección entre los conjuntos A y B, definidos en $\mathbb{R}$.

a) $A=\{(x,\ y)/y=2x+3\}$; $B=\{(x,\ y)/y=x-1\}$

b) $A=\{(x,\ y)/y=x-5\}$; $B=\{(x,\ y)/y=x+1/2\}$

R: a) el punto (–4; – 5) ; b) las rectas no se cortan.

8) Resuelva y grafique

a) $\begin{cases} 4x+5y=-4 \\ -2x-\dfrac{5}{2}y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x-y=5 \\ 6x-2y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y-1=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ x+y+6=0 \end{cases}$

R: a) Sistema incompatible; b) $\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{11}{4}\right)$; c) (–3: 14) d) (–2; –4)

9) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas satisface una y sólo una de las proposiciones que quedan enunciadas completando los espacios en a), b) y c) con una de las expresiones consignadas más abajo. Complete escribiendo la que corresponda para que la proposición resulte verdadera.

a) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene solución única si y sólo si ……

b) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas no tiene solución si y sólo si ……

c) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones si y sólo si

……

i) su gráfica consiste en dos rectas paralelas no coincidentes.

ii) su gráfica consiste en dos rectas perpendiculares entre sí.

iii) su gráfica consiste en dos rectas paralelas coincidentes.

iv) su gráfica consiste en dos rectas que se cortan en un punto.

10) La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F=\dfrac{9}{5}C+32.$

a) Represente gráficamente la ecuación con los valores en grados Celsius en el eje horizontal y Fahrenheit en el vertical.

b) Explique qué representa el punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas.

c) Diga cuál es la pendiente de la recta y qué representa.

d) Un medicamento debe conservarse a una temperatura entre 40 ^0F y 50 ^0F, ¿a qué intervalo corresponde en grados Celsius?

e) Convierta en grados Fahrenheit i) 0 ^0C, *ii) 100* ^0C, *iii) 25* ^0C.

f) ¿Qué temperatura es la misma en ambas escalas?

R: d) entre aproximadamente $4{,}4\,^0C$ y $10\,^0C$; e) i) 32 ^0F; ii) 212 ^0F; iii) 77 ^0F;

f) -40 ^0F = -40 ^0C ^0C

12) Cuando el aire seco se eleva, se expande y se enfría. Suponga que la temperatura a nivel del suelo es de 25 ^0C y a una altura de 10 km es de 12 ^0C.

a) Exprese una fórmula de la temperatura T en ^0C en función de la altitud h en kilómetros, suponiendo que la función es lineal.

b) Represente gráficamente la función y explique el significado de la pendiente.

c) ¿Cuál es la temperatura del aire a una altitud de 3 km?

R: a) $T = -\dfrac{13}{10}h + 25$ c) $21{,}1^\circ C$

13) Cuando se realiza una prueba de esfuerzo en un paciente, se sabe que , cuando el ritmo cardíaco alcance cierto valor, la prueba deberá interrumpirse. El máximo ritmo cardíaco en latidos por minutos permitido puede calcularse mediante la fórmula *m = - 0,875 x + 190* donde *x* representa la edad del paciente.

Determine a) el ritmo cardíaco máximo para una persona de 60 años. b) la edad de un paciente cuyo ritmo cardíaco máximo permitido es de 150 latidos por minutos.

R: a) m = 137 latidos por minuto b) 46 años

14) Un fabricante de camperas tiene costos fijos mensuales de $12.450 y costos variables de $ 125,00 por cada campera que fabrica. Escriba una ecuación que relacione el costo C(x)

de fabricar las camperas con la cantidad x de camperas fabricadas. Use la fórmula para hallar el costo de fabricar 350 camperas.

R: $C(x) = 125x + 12450 \quad \$56200$

15) En una fábrica de relojes para taxis deben programar los relojes para lo cual quieren encontrar una función que les permita conocer el precio del viaje de acuerdo con los metros recorridos. Saben que se cobra \$5 la bajada de bandera y \$2,50 por cada 100 metros recorridos.

a) ¿Qué fórmula deberán programar?

b) ¿Cuánto deberán cobrar por un recorrido de 1,5 km?

R: a) $C(x) = 5 + 2{,}5.x$; b) \$42,50

16) El proceso productivo de una empresa determina que una máquina tarda 10 minutos para empezar a producir, y luego tarda 3 minutos para producir cada unidad.

a) Obtenga la relación funcional existente entre el tiempo de producción T y la cantidad de unidades producidas x.

b) ¿Cuánto tiempo se tardará en producir 150 unidades

c) ¿Cuántas unidades se producen en 1330 minutos?

R: a) T (x) = 10 + 3 x ; b) 460 minutos = 7 horas 40 min.; c) 440 unidades.

17) Los gastos de consorcio que deben abonar mensualmente los propietarios de un edificio de departamentos se discriminan de la siguiente manera: \$ 120 como gasto fijo por los servicios generales y \$ 2 por cada metro cuadrado edificado que posee cada propietario.

a) Encuentre la relación funcional existente entre el número de metros cuadrados edificados (x) y el importe que debe abonar cada propietario C x).

b) ¿Cuánto abonará mensualmente el propietario de un departamento de 110 metros cuadrados?

c) Si un propietario abona mensualmente \$260, ¿cuál es la superficie de su departamento?

R: a) $C(x) = 120 + 2x$; b) \$ 340 ; c) 70 metros cuadrados.

18) Un servicio técnico a domicilio de computadoras cobra a razón de \$10 por hora (de acuerdo al tiempo que lleve realizar el trabajo) y un adicional de \$15 por la visita.

a) Encuentre la fórmula de la función que expresa el costo del servicio en relación al tiempo que demora en hacerse el trabajo.

b) Si el costo de un trabajo fue de $75 ¿cuánto tiempo llevó realizarlo?

c) ¿Cuál será el costo del servicio si éste requiere de dos horas y media?

R: a) $C(x) = 15 + 10x$; b) 6 horas ; c) $40.

19) En una fábrica de relojes para taxis deben programar los relojes para lo cual quieren encontrar una función que les permita conocer el precio del viaje de acuerdo con los metros recorridos. Saben que se cobra $5 la bajada de bandera y $2,50 por cada 100 metros recorridos.

a) ¿Qué fórmula deberán programar?

b) ¿Cuánto deberán cobrar por un recorrido de 1,5 km?

R: a) $C(x) = 5 + 2{,}5.x$; b) $42,50

20) El proceso productivo de una empresa determina que una máquina tarda 10 minutos para empezar a producir, y luego tarda 3 minutos para producir cada unidad.

a) Obtenga la relación funcional existente entre el tiempo de producción T y la cantidad de unidades producidas x.

b) ¿Cuánto tiempo se tardará en producir 150 unidades?

c) ¿Cuántas unidades se producen en 1330 minutos?

R: a) T (x) = 10 + 3 x ; b) 460 minutos = 7 horas 40 min.; c) 440 unidades.

21) Los gastos de consorcio que deben abonar mensualmente los propietarios de un edificio de departamentos se discriminan de la siguiente manera: $ 120 como gasto fijo por los servicios generales y $ 2 por cada metro cuadrado edificado que posee cada propietario.

a) Encuentre la relación funcional existente entre el número de metros cuadrados edificados (x) y el importe que debe abonar cada propietario C x).

b) ¿Cuánto abonará mensualmente el propietario de un departamento de 110 metros cuadrados?

c) Si un propietario abona mensualmente $260, ¿cuál es la superficie de su departamento?

R: a) $C(x) = 120 + 2x$; b) $ 340 ; c) 70 metros cuadrados.

22) Un servicio técnico de computadoras cobra a razón de $10 por hora (de acuerdo al tiempo que lleve realizar el trabajo) y un adicional de $15 por la visita (sólo realiza trabajos a domicilio).

a) Encuentre la fórmula de la función que expresa el costo del servicio en relación al tiempo que demora en hacerse el trabajo.

b) Si el costo de un trabajo fue de $75 ¿cuánto tiempo llevó realizarlo?

c) ¿Cuál será el costo del servicio si éste requiere de dos horas y media?

R: a) $C(x) = 15 + 10x$; b) 6 horas ; c) $40.

TEMA 9: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Representemos en un mismo sistema de coordenadas, las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$:

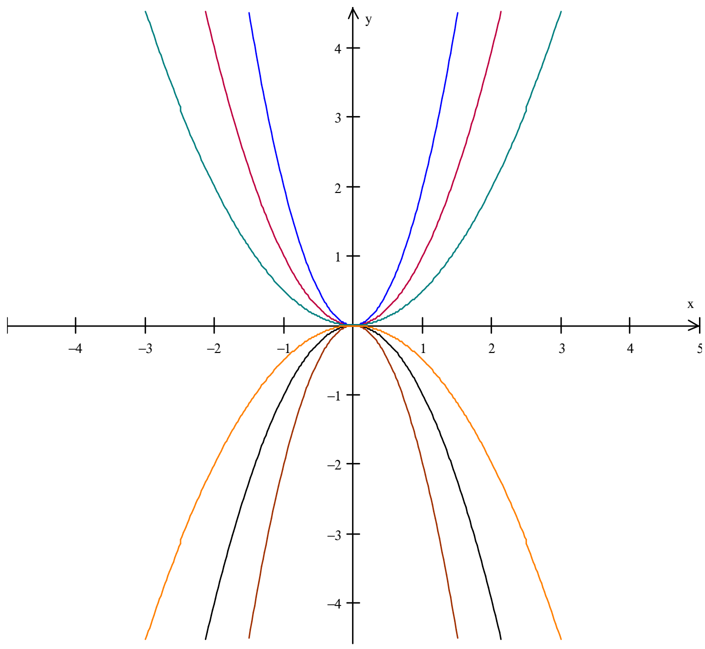
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=2x^2$ c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

d) $f(x)=-x^2$ e) $f(x)=-2x^2$ f) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

Como primer paso, construimos una tabla de valores:

x	x^2	$2x^2$	$\frac{1}{2}x^2$	$-x^2$	$-2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
-2	4	8	2	-4	-8	-2
-1	1	2	½	-1	-2	-1/2
0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	½	-1	-2	-1/2
2	4	8	2	-4	-8	-2

Llevando los puntos de coordenadas (*x, f(x)*) a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, se obtienen las siguientes gráficas:



La curva obtenida en cada caso recibe el nombre de parábola. Tiene un vértice y un eje de simetría.

EJERCICIOS

1) a) Dé las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de las parábolas anteriores.

   b) Exprese el dominio y el conjunto imagen.

2) Represente en un mismo sistema de coordenadas las funciones definidas en $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 - 2$

3) Idem, las funciones:

   $f(x) = -2x^2$ $g(x) = 2x^2 + 1$ $h(x) = x^2 - 2$

Dé, en cada caso, el dominio, el conjunto imagen, las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría.

La función definida en el conjunto de los números reales por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se llama función cuadrática y su gráfica es una parábola.

Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y la función tiene un valor mínimo. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y la función tiene un valor máximo.

Los “ceros” de la función cuadrática son los valores de la variable independiente que anulan a la función, esto es, los x tales que $y = f(x) = 0$. Si los dos ceros o raíces son reales y desiguales, la parábola corta al eje de abscisas en x_1 y x_2, si las raíces son reales e iguales: $x_1 = x_2$, la parábola es tangente al eje x, y si son complejas conjugadas, la parábola no corta a dicho eje.

Muestre que la abscisa del vértice de la parábola es $x = \frac{-b}{2a}$. (Sugerencia; suponga que las raíces o ceros de la función son reales y desiguales y encuentre las coordenadas del punto medio del segmento que une los ceros de la función).

4) Para las siguientes parábolas se pide:

   a) los ceros de las correspondientes funciones

b) las intersecciones con los ejes coordenados

c) las coordenadas del vértice

d) el valor máximo o el valor mínimo de la función, según corresponda

e) la ecuación del eje de simetría

f) la gráfica

g) el conjunto imagen.

i) $y = x^2 + 6x + 5$ ii) $y = -2x^2 + 11x - 15$ iii) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

iv) $y = 4x^2 + 1$ v) $f(x) = x^2 + 6x - 7$

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO 4.I)

$y = x^2 + 6x + 5$

Los ceros de la función se encuentran resolviendo la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$

Se obtiene $x_1 = -5$, $x_2 = -1$

a) las intersecciones con el eje x son los puntos $(-5,0)$ y $(-1,0)$

Si x = 0, se tiene y = 5. La intersección con el eje y es el punto (0, 5).

b) la abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a}$; $x = \frac{-6}{2} = -3$

Si *x = -3 es y = -4.* Estas son las coordenadas del vértice. *V(-3,-4).*

c) el eje de simetría es la recta de ecuación *x = -3.*

d) Se propone construir la gráfica y comprobar que el conjunto imagen es el conjunto $\{ y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq -4 \}$

5) Dadas las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g(x) = 2x^2 - 4x - 6$ y $h(x) = -x^2 + 2x + 3$, encuentre:

a) las coordenadas del vértice de la curva

b) los ceros de las funciones

c) represente gráficamente en un mismo sistema de coordenadas

d) exprese el conjunto imagen.

6) Halle la ecuación de la parábola, y represente la curva, si:

a) Los ceros son –5 y 2, y pasa por el punto $(1, 6)$.

b) Los ceros son 0 y 3, y pasa por el punto $(4, 8)$.

c) Los ceros son 1 y 5 y pasa por el punto $(2, -9)$.

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO 6-A)

La ecuación de la parábola puede escribirse $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Reemplazando: *y = a (x + 5) (x – 2) (1)*

El punto (1,6) pertenece a la parábola (sus coordenadas satisfacen la ecuación):

6 = a (1 + 5) (1 – 2)

6 = -6 a Luego es *a = -1* Reemplazando en (1) se obtiene:

y = - (x + 5) (x – 2)

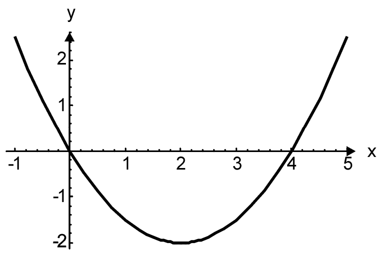
y = $-x^2 - 3x + 10$

Verifique si la solución es correcta y grafique.

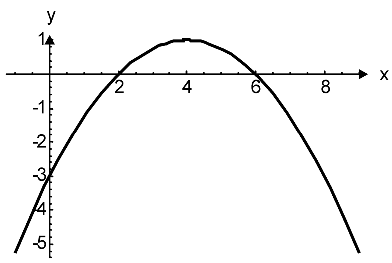
7) Determine k en la ecuación: $y = 4x^2 - 5x + k$, de modo que la gráfica tenga su vértice en el eje de abscisas.

8) Encuentre el conjunto de valores de k en la ecuación $y = x^2 - 2x - 5 + k$, de modo que la gráfica de la función no corte al eje de abscisas.

9) Dé la ecuación de la parábola:



(a)



(b)

10) La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene por gráfica cartesiana la que se representa. Se pide:

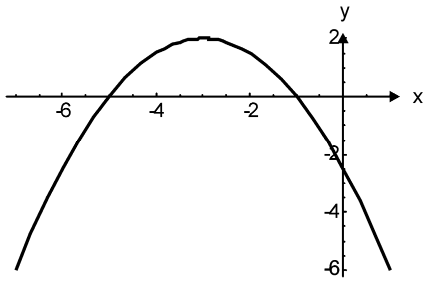
a) dé los ceros de la función.

b) exprese $f(x)$ como producto.

c) determine si los pares $(-1, 4)$ y $(-3, 2)$ pertenecen a la función.

RESOLUCIÓN

a) los ceros son *–5 y –1.*



b) f(x) = a (x + 5)(x + 1) (1)

El punto *(0; -2,5)* pertenece a la parábola: sus coordenadas satisfacen la ecuación.

-2,5 = a (0 + 5) (0 + 1) ; -2,5 = a . 5

Luego es a = -0,5

Reemplazando en (1) f(x) = -0,5 (x + 5) (x + 1)

$$f(x) = -0,5x^2 - 3x - 2,5$$

Verifique si la respuesta es correcta.

1) Reemplazando en la fórmula de la función se prueba que *(-1,4)* no pertenece a *f* y que *(-3,2)* sí pertenece. En el caso del punto *(-1,4)* no es necesario efectuar cálculos,¿por qué?.

2) Halle los puntos de intersección de la recta *y = x - 2* con la parábola $y = x^2 - 4$.

RESOLUCIÓN

Se trata de determinar los puntos de coordenadas *(x,y)* que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones. Para ello debemos resolver el sistema formado por las dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Igualamos los segundos miembros y resolvemos la ecuación:

$x^2 - 4 = x - 2$; $x^2 - 4 - x + 2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$

Se obtiene: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Sustituyendo en la segunda ecuación se tienen los respectivos valores para y. Ellos son: $y_1 = -3$, $y_2 = 0$. Los puntos de intersección *(-1,-3) y (2,0)*

Verifique si la solución es correcta.

11) Encuentre la intersección de la parábola que tiene por vértice el punto $(1/2,-9/2)$ y corta al eje de abscisas en $(-1,0)$ y $(2,0)$, con la recta $y=-2x-2$.

12) Una recta y una parábola se cortan en los puntos $A(1,8)$ y $B(-4,3)$. El vértice de la parábola es $V(-2,-1)$.

a) Encuentre la ecuación de la recta.

b) Encuentre la ecuación de la parábola. c) Represente gráficamente.

13) Resuelva, verifique y represente los sistemas mixtos:

a) $\begin{cases} y=2x^2+2x+12 \\ y=3x-11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=2x^2+8x+6 \\ 6x-y+6=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=3x^2-5x+1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-4x+4=y \\ y=4x \end{cases}$

14) Una parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, corta en el punto $(1,4)$ a una recta que tiene ordenada al origen igual a 6. ¿Cuál es el otro punto de intersección entre las gráficas?

15) Analice la gráfica y determine:

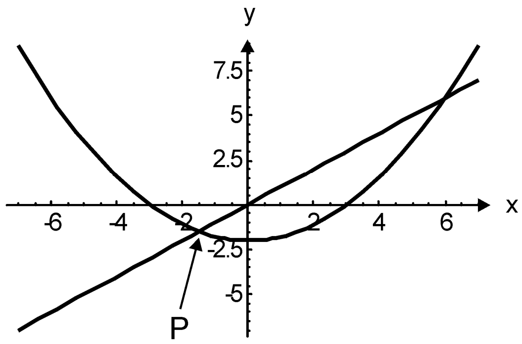
a) La ecuación de la recta R si el punto *P* tiene coordenadas $(-1,5,-1,5)$

b) La ecuación de la parábola.

c) El otro punto de intersección entre la recta y la parábola.

d) Las coordenadas del vértice de la parábola.

e) El mínimo de la función representada por la parábola.



BIBLIOGRAFÍA

- Sobel, M y Lerner, N. (1996): *“Álgebra”,* México*,* Ed. Prentice Hall.
- Sullivan, Michael- (2006) *“Álgebra y Trigonometría”,* México, Ed. Pearson- Educación
- Angel, Allen R. (2004) *“Algebra intermedia”* México, Ed. Pearson- Educación
- Hoffmann, Laurence D., Bradley, Gerard L y Rosen, Keeneth H. (2006) *“Cálculo Aplicado Para Administración, Economía y Ciencias Sociales”.*
- Kelly, T. J.; Anderson, J.T. y Balomenos, R.H.(1996), *“Álgebra y Trigonometría.. Precálculo”,* México, Ed. Trillas.
- Fleming, W y Varberg, D. (1993) *“Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”,* México*,* Ed. Prentice Hall.
- Goodman, A. Y Hirsch, L. (1996) *“Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”,* México*,* Ed. Prentice Hall.
- Zill, Denis y Dejar, Jacqueline, (1994) *“Álgebra y Trigonometría”,* México, McGraw-Hill.
- Stewart, James y otros (2007) “Introducción al Cálculo”, Ed. Thomson Learning, Buenos Aires.
- Stewart, James (2008) “Cálculo de una variable – Trascendentes tempranas”, Cengage Learning Editores, México.
- de Guzmán, M; Colera, J y Salvador, A (1991) *Matemáticas - Bachillerato 2*- Madrid, Anaya.
- Vázquez de Tapia, Nelly; Tapia de Bibiloni, A y Tapia, Carlos: *Matemática I, II, III, IV.* Buenos Aires, Ed. Estrada.