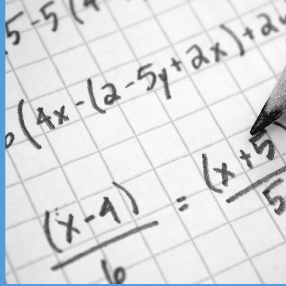
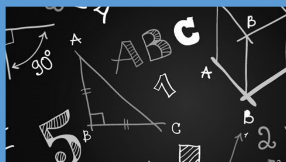
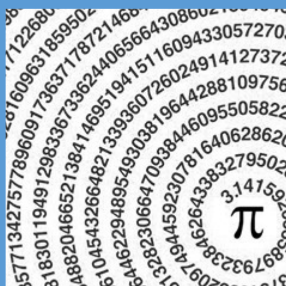
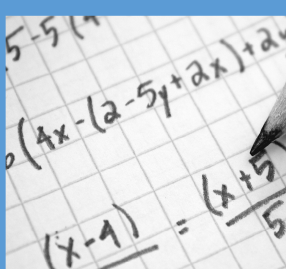






Ingreso UNER 2020

Facultad de Ciencias Económicas

Curso de Ambientación a la Vida Universitaria

Módulo Matemática

COORDINADORA

Profesora María Mercedes Colombo

Colaboradores

Profesor Ricardo José María Claucich

Profesora Dora Zuriaga de Brutti

Coordinación del Curso de Ambientación a la Vida Universitaria – Revisión:

Cr. Fernando Yusef Dominguez

Adaptado por:

Prof. Marisa Battisti Arduin

PRESENTACIÓN

El siguiente módulo está destinado a los ingresantes de las carreras de grado y pregrado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

Este material inicialmente ha sido creado por los autores para el módulo de matemática para el curso de ambientación a la vida universitaria de todas las unidades académicas de la UNER, y luego fue adaptado con aplicaciones a las Ciencias Económicas para los estudiantes de esta Casa de Estudios.

ÍNDICE

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES Y SUS SUBCONJUNTOS

1. Los números enteros

Desde épocas remotas, el hombre debió satisfacer su necesidad de contar objetos, personas, animales. Para hacerlo, por intuición comenzó a usar los números que llamamos naturales: $1,2,3,4,\ldots$, asociados al concepto de cantidad.

El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos. El primer elemento es el uno, la unidad, $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$.

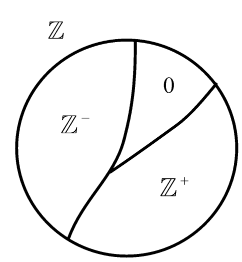
En ese conjunto se definen dos operaciones elementales: la adición y la multiplicación y se establecen las propiedades que para ellas se cumplen. La suma de dos números naturales cualesquiera es otro número natural y el producto entre dos números es también otro número natural. Se definen también, con ciertas limitaciones, las operaciones inversas: la sustracción y la división respectivamente. En el caso de la sustracción, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo; en el de la división, el dividendo debe ser múltiplo del divisor.

En $\mathbb{N}$, la diferencia entre dos números a y b es el número c si y sólo si $c+b=a$. Para que esa operación sea posible, a debe ser mayor que b. Las operaciones $3-3$, $3-7$ no pueden efectuarse.

El cociente entre dos números a y b es otro número c si y sólo si $c\cdot b=a$. El cociente $15:7$ no puede efectuarse porque no existe ningún número natural que multiplicado por 7 de por resultado 15.

Como una extensión del conjunto de los naturales se crearon los **números enteros.** En el nuevo conjunto la diferencia entre dos números es siempre posible. Por ejemplo: $3-3=0$; $3-7=-4$.

La unión entre el conjunto de los enteros positivos, el conjunto que tiene como elemento al cero y el de los enteros negativos es, precisamente, el conjunto de los enteros Z. El cero es el elemento neutro para la suma: $a+0=a$ para todo a perteneciente a Z. Los números negativos son los "inversos aditivos", u opuestos de los positivos: -10 es el opuesto de 10 pues $10+(-10)=0$.



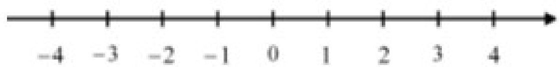
Al conjunto de los enteros positivos con el cero se los denomina conjunto de los enteros no negativos y se llama conjunto de los enteros no positivos al conjunto de los enteros negativos con el cero:

Conjunto de enteros no negativos $=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto de enteros no positivos $=\{\ldots, -10, -9, -8, \ldots, -2, -1, 0\}$

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Representamos los enteros en la recta numérica:



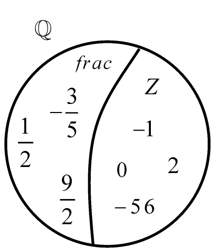
2. Los números racionales

Las fracciones se crearon para expresar partes más pequeñas que la unidad, por ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$.

La fracción $\frac{a}{b}$ significa que la unidad se dividió en b partes y se tomaron a. El numerador es a, b el denominador y éste no puede ser cero.

Los números que pueden escribirse como cociente de dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, se llaman números racionales.

EJEMPLOS $\quad \frac{-4}{-3}=\frac{4}{3} \qquad 2:3=\frac{2}{3} \qquad -8:24=-\frac{1}{3}$



Si el numerador es menor que el denominador, la fracción se dice propia; si el denominador es menor que el numerador, impropia, y si el numerador es múltiplo del denominador el número racional es entero.

Los números racionales pueden escribirse en forma decimal.

Consideremos los números racionales: $\frac{3}{5}=0{,}6$; $\frac{43}{8}=5{,}375$; $\frac{13}{20}=0{,}65$.

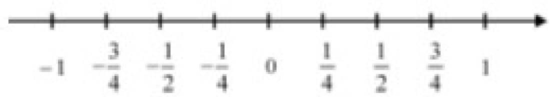
La expresión decimal tiene un número finito de dígitos. En los siguientes ejemplos, luego de la coma decimal, se tienen infinitas cifras pero hay una "parte" que se repite periódicamente:

a) $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ b) $\frac{43}{15} = 2,8666\ldots$ c) $\frac{29}{225} = 0,128888\ldots$

El conjunto de los racionales es un "conjunto denso". Esto significa que entre dos números racionales cualesquiera, existe siempre otro número racional:

Entre $\frac{1}{2}$ y 1, el promedio o media aritmética $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$; entre $\frac{3}{4}$ y 1, el $\frac{7}{8}$.

Los números racionales se representan en la recta numérica:



Un número decimal periódico puede expresarse como fracción, en la forma que explicaremos mediante ejemplos.

a) La expresión n decimal $0,252525\ldots$ se dice periódica pura, el período es 25 y se repite a partir de la coma decimal.

Sea $x = 0,252525\ldots$ multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, $100x = 25,2525$. Restamos miembro a miembro.

$$\begin{array}{r} 100x = 25,2525\ldots \\ x = 0,252525\ldots \\ \hline 99x = 25 \end{array}$$

$$x = \frac{25}{99}$$

b) $x = 2,121121121$ Es periódica pura, de período de tres cifras: 121.

Multiplicamos por 1000:

$$\begin{aligned} 1000x &= 2121{,}121121\ldots \\ x &= 2{,}121121\ldots \\ \hline 999x &= 2119 \end{aligned}$$

$$x = \frac{2119}{999} = 2 + \frac{121}{999}$$

c) $x = 3{,}999\ldots$ El período tiene una cifra. Multiplicamos por 10:

$$\begin{aligned} 10x &= 39{,}999\ldots \\ x &= 3{,}999\ldots \\ \hline 9x &= 36 \end{aligned}$$

$$x = \frac{36}{9} = 4$$

d) x = 0,2212121…… Es periódica mixta: la parte no periódica tiene una cifra y el período tiene dos cifras.

Multiplicamos por 1000, ambos miembros; también por 10, y luego restamos miembro a miembro:

$$\begin{aligned} 1000x &= 221{,}2121\ldots \\ 10x &= 2{,}2121\ldots \\ \hline 990x &= 219 \end{aligned}$$

Luego $x = \frac{219}{990} = \frac{73}{330}$

Verifique que $x = 1{,}132444\ldots = 1 + \frac{149}{1125}$.

El pasaje de una expresión decimal periódica, puede hacerse también siguiendo las reglas siguientes:

1) Una expresión decimal periódica pura es igual a la fracción cuyo numerador es el período, y el denominador, el número formado por tantos 9, como cifras tenga el período. (parte entera nula).

2) Una expresión decimal periódica mixta es igual a la fracción cuyo numerador es la parte no periódica seguida del periodo menos la parte no periódica, y cuyo denominador está formado por tantos 9 como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros, como cifras tenga la parte no periódica. (parte entera nula).

Si el período es 9, se suprime toda la parte periódica y se suma uno a la cifra anterior.

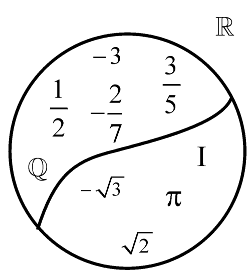
EJEMPLO: $3{,}259999\ldots = 3{,}26$

3. Los números irracionales

Los números cuya representación decimal es indefinida y no periódica no son racionales, no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros, se llaman números irracionales. Los racionales son "conmensurables", los irracionales, no lo son.

Son irracionales $\sqrt{2} = 2{,}41421356\ldots$; el número $\pi = 3{,}14159\ldots$, que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su propio diámetro, $\sqrt[3]{5} = 1{,}709975\ldots$; el número $e = 2{,}71828182845 9045\ldots$

4. Los números reales

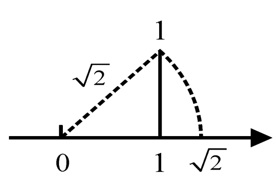


La unión entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales, da por resultado el conjunto de los números reales.

4.1 Representación de los números reales en la recta numérica

Sea el número real $\sqrt{2}$ (irracional). Construimos un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1. Por corolario del Teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

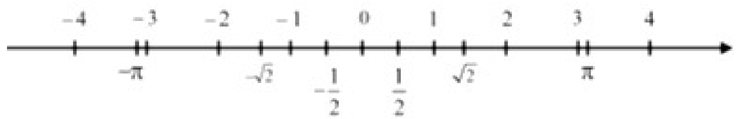
Con esa medida, representamos en la recta el número $\sqrt{2}$.



Ejercicio

Represente en la recta numérica los números: $\sqrt{13}$; $\sqrt{3}$.

(Ayuda: $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$; $3 = 2 + 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$.)



Entre los números reales y los puntos de una recta existe una correspondencia según la cual, a cada número real le corresponde un punto de la recta, y, recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un conjunto denso, porque entre dos números reales cualesquiera existe otro número real.

EJERCICIOS

1) Escriba V o F en $(\ )$, según la proposición sea verdadera o falsa:

   a) Todo número entero es racional. $(\ )$

   b) Entre dos números enteros cualesquiera, existe siempre otro número entero. $(\ )$

   c) El conjunto de los enteros es denso. $(\ )$

   d) El conjunto de los racionales y el de los irracionales son disjuntos. (conjuntos disjuntos son los que no tienen elementos comunes). $(\ )$

2) Exprese como fracciones: a) $0{,}1999\ldots$; b) $3{,}219999\ldots$; c) $10{,}99999\ldots$ Analice los resultados y formule su propia conclusión.

3) Escriba como número decimal y clasifique la expresión que obtenga: a) $\frac{15}{24}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{77}{36}$.

4) Ordene de menor a mayor: 0; -3; -7; 21; -34; 12; 4.

5) Ordene de mayor a menor: 0; 0,25; -1,2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$.

6) Coloque cruces en las casillas correspondientes según a cuál/es conjuntos numéricos pertenezcan los siguientes números.

	7	-3,2	$\sqrt{3}$	$1,\hat{6}$	$-\frac{5}{5}$	$\frac{15}{6}$	-6	$\sqrt{36}$	$\sqrt[3]{-8}$
$\mathbb{N}$									
$\mathbb{Z}$									
$\mathbb{Q}$									
I									
$\mathbb{R}$									

7) Haga una lista o describa los elementos de los siguientes conjuntos:
   a) El conjunto de los números naturales menores que 5.
   b) El conjunto de los números enteros mayores que 2020.
   c) El conjunto de los números enteros mayores o iguales a 2 y menores que 7.
   d) El conjunto de enteros mayores que -3.
   e) El conjunto de enteros negativos mayores que -3.

8) Escriba el o los elementos del conjunto $\left\{-4,0,2,9,\sqrt{11},1,\frac{1}{3}\right\}$ que satisfacen la condición dada:

a) Número natural:	e) Número entero no negativo:
b) Número racional:	f) Número irracional:
c) Número natural par:	g) Número primo:
d) Número entero:	h) Número real:

9) Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En el caso de las que considere falsas, justifique por qué o muestre un "contrajemplo", es decir, un ejemplo que prueba la falsedad del enunciado:
   a) El número 10 es racional.
   b) El número π es racional.
   c) Todo número negativo es entero.
   d) El único número real mayor que 5,2 y menor que 5,4 es 5,3.

5. El conjunto de los números complejos

En el conjunto de los números reales, una ecuación como la siguiente, no tiene solución: $x^2+1=0$. Sí queremos "despejar" x, llegamos a: $x^2=-1$, y no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1. Para dar solución a expresiones como esa, se crearon los números imaginarios. La unidad imaginaria es "i". La unión del conjunto de los reales y el de los imaginarios, da por resultado el de los números complejos. La unidad imaginaria i, es el complejo tal que su cuadrado es igual a -1.

En el conjunto C tienen significado las raíces de índice par de números negativos

$$\sqrt{-1}=i \;\; pues, por\ definición\ i^2=-1$$

6. Operaciones con números reales

6.1 Valor absoluto de un número real

DEFINICIÓN

El valor absoluto de un número real x es el número real, que indicamos $|x|$, tal que:

$$|x|=\begin{cases} x, & si\ x\geq 0 \\ -x, & si\ x<0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

a) $|0|=0$ porque $0\geq 0$.

b) $|-2{,}4|=-(-2{,}4)=2{,}4$ porque $-2{,}4\leq 0$.

c) $|5{,}25|=5{,}25$ porque.............................

6.2. Adición de números reales

PROPIEDADES

Si *a, b* y *c* son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

1. La suma de dos números reales es otro número real: *a + b* es un número real. (ley de cierre)

2. Asociativa: *(a + b) + c = a + (b + c)*

3. Conmutativa: *a + b = b + a*

4. Existencia de elemento neutro: existe el número real 0 (cero) tal que *a + 0 = 0 + a = a*

5. Existencia de elemento opuesto: para todo número real *a* distinto de cero existe *(-a)* tal que *a + (-a) = 0*.

EJEMPLOS

a) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{2.5-3.3}{15}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}$

b) $-\frac{4}{9}+(-12)=-\frac{4}{9}-12=\frac{-4-108}{9}=-\frac{112}{9}=-12\frac{4}{9}$

c) $3\sqrt{2}+4+5\sqrt{2}=4+8\sqrt{2}$

d) 0,3333... - $\frac{4}{5}$ = $\frac{3}{9}-\frac{4}{5}=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5-4.3}{15}=\frac{5-12}{15}=-\frac{7}{15}$

6.3 Diferencia o sustracción de números reales

Es la operación inversa de la suma.

DEFINICIÓN

Dados dos números reales a y b, la diferencia es el número real que se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo: a – b = a + (-b)

EJEMPLO

$$-\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{7}{8}=\frac{-12+7}{8}=-\frac{5}{8}$$

Cuando en una expresión figuran términos encerrados entre paréntesis ( ), corchetes $[\;]$ o llaves $\{\;\}$, para efectuar las operaciones se quitan previamente esos símbolos teniendo en cuenta que cuando están precedidos por un signo +, se conservan los signos de los términos encerrados; y si están precedidos por un signo negativo, se cambian los signos de todos los términos encerrados. Cuando en una expresión figuran términos agrupados por esos tres símbolos, se los elimina ordenadamente, comenzando por los símbolos que se encuentran en el interior, y, si corresponde, reduciendo los términos semejantes.

EJEMPLO

$$-\frac{2}{5}-\left[\frac{2}{3}-\left(3-\frac{5}{4}\right)+\left(-2+\frac{2}{3}\right)\right]=-\frac{2}{5}-\left[\frac{2}{3}-3+\frac{5}{4}-2+\frac{2}{3}\right]=$$

$$=-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+3-\frac{5}{4}+2-\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+5-\frac{5}{4}=\frac{-24-80+300-75}{60}=\frac{121}{60}=2\frac{1}{60}$$

6.4. Multiplicación de números reales

PROPIEDADES

Si *a, b y c* son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Ley de cierre: el producto de dos números reales es otro número real.

b) Asociativa: *(a .b).c = a.(b .c)*

c) Conmutativa: *a. b = b. a*

d) Existencia de elemento neutro: existe el número real *1*(uno) tal que *a.1=1.a = = a*

e) Existencia de inverso: para todo número real a distinto de cero, existe el inverso $\frac{1}{a}$ tal que $a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$ Al inverso de a se lo expresa también a^{-1}.

f) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: *a (b + c) = a . b + a . c*

REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN

(+) . (+) = (+)	(-) . (+) = (-)
(+) . (-) = (-)	(-) . (-) = (-)

EJEMPLOS

a) $\frac{3\cdot(-5)-4\cdot 6}{3\cdot 5+4}$ R: $-\frac{39}{19}$

b) $\frac{12\cdot(-4):6}{4-3\cdot(-5)}$ R: $-\frac{8}{19}$

c) $\frac{42:7+2\cdot(-6)}{4+(-3)\cdot 6-10}$ R: $\frac{1}{4}$

6.5. División de números reales

DEFINICIÓN

Dados dos números reales *a y b,* con *b* distinto de cero, el cociente *a : b* es el número real *c* tal que el producto *c . b = a.*

Para efectuar la división, multiplicamos *a* por el inverso de *b*.

EJEMPLO

$$(-6) : \frac{3}{5} = -6 \cdot \frac{5}{3} = 10$$

6.6. Potenciación

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real positivo, la enésima potencia de *a* es: $a^n = a.a.a.a.....a$ (*n* factores *a*) ; si *n = 1* es $a^1 = a$; si $n = 0$ es $a^0 = 1$

a es la base de la potencia, *n* es el exponente. Si la base es negativa y el exponente es un número par, la potencia es positiva; si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.

EJEMPLOS

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \qquad (-3)^3 = -27 \qquad (-5)^4 = 625$$

DEFINICIÓN

Si *a* es distinto de cero y *n* es un entero positivo, entonces se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si *m* y *n* son números enteros, las siguientes propiedades llamadas *leyes de los exponentes,* se demuestran a partir de las definiciones anteriores:

a) $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$

c) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

d) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, si\, b \neq 0$

Explique las propiedades expresadas anteriormente.

EJEMPLOS

a) $\left(-2x\right)^3 x^{-5} = (-2)^3 x^3 x^{-5} = -8x^{3-5} = -8x^{-2} = -\dfrac{8}{x^2}$

b) $\left(\dfrac{2}{5}a^2 b^3\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 a^6 b^9 = \dfrac{8}{27}a^6 b^9$

EJERCICIOS

1) Efectúe los cálculos y escriba cada expresión de manera que todos los exponentes sean positivos.

a) $\left(\dfrac{2x^3 y^{-3}}{5x^4 y^{2}}\right)^{-1}$ b) $\left(\dfrac{7a^4 b^{-4}}{2a^2 b^2}\right)^{-2}$ c) $\left(\dfrac{3x^{-3} y^{4}}{10x^2 y^6}\right)^{-1}$

RESPUESTAS

a) $\dfrac{5}{2}x y^5$ b) $\dfrac{4b^{12}}{49a^4}$ c) $\dfrac{10}{3}x^5 y^2$

2) Escriba el valor de *x* que haga verdadera cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3^x \cdot 3^5 = 3^8$ $b)$ $2^{-5} \cdot 2^x = 2^9$ $c)$ $\dfrac{4^{-3}}{4^x} = 4^5$

6.7. Radicación. Potencias de exponentes fraccionarios

DEFINICIÓN

Si *a* es un número real y *n* es un número entero positivo mayor o igual que 2, la raíz enésima de *a* es el número *x*, tal que $x^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = x \;\; si \; y \; sólo \; si \; \left(x\right)^n = a$$

Si *a* es positivo, entonces *x* es positivo y se llama *raíz enésima principal de a.*

Si *a* es negativo y *n* es un número par, entonces la raíz enésima no es un número real.

Si *a* es negativo y *n* es un número impar, entonces *x* es negativo.

Si *x =0,* entonces $\sqrt[n]{0} = 0$

EJEMPLOS

$\sqrt[3]{-343}=-7 \quad porque\ (-7)^3=-343$ $\qquad \sqrt[3]{8}=2\ porque\ 2^3=8$

$\sqrt{-4}\ no\ es\ un\ número\ real\ porque\ el\ índice\ es\ 2, número\ par, y\ el\ radicando\ es\ negativo.$

$\sqrt{25}=5\ porque\ 5^2=25$ Observación: Si bien $(-5)^2=25$ se conviene en que la raíz cuadrada de 25 es 5. También se la llama raíz cuadrada principal de 25.

REGLAS PARA LA RADICACIÓN

Si las raíces son números reales, entonces:

a) Para la multiplicación: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

b) Para la división: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad si\ b\neq 0$

c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\,n]{a}$

Enuncie las propiedades expresadas anteriormente.

EJEMPLOS

a) $\sqrt[3]{-2}\ \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{-2^3}=-2$

b) $\sqrt{18x^5y^4}=\sqrt{2.3^2.x^5y^4}=3x^2y^2\sqrt{2x}$

c) $c)\ 4\sqrt{90}+3\sqrt{10}-9\sqrt{40}=4\sqrt{2.3^2.5}+3\sqrt{2.5}-9\sqrt{2^3\,5}=$

$=12\sqrt{10}+3\sqrt{10}-18\sqrt{10}=-3\sqrt{10}$

d) Simplifique la expresión: $\sqrt[4]{\dfrac{x^2\,y^2}{81x^8\,y^7}}$

Rta. $\dfrac{1}{3xy}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2\,y}}$

Potencias de exponentes racionales

DEFINICIÓN

Si a es un número real y n es un número entero mayor o igual que 2, entonces $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, siempre que exista $\sqrt[n]{a}$, dado que si n es par y a es negativo, la expresión $\sqrt[n]{a}$ no existe en el conjunto $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN

Si a es un número real y m y n son números enteros primos entre sí (significa que el máximo común divisor es 1) con $n \geq 2$, entonces:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ siempre que exista } \sqrt[n]{a}$$

EJEMPLOS

a) $\left(\dfrac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5^3}{2^3}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{5^3}{2^3}\right)}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$

b) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/4} + \left(\dfrac{256}{625}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{2^4}{5^4}\right)} + \sqrt[4]{\dfrac{2^8}{5^4}} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5}$

Racionalización de denominadores

Dada una expresión fraccionaria en la que figuran radicales en el denominador, se acostumbra escribir una fracción equivalente que no contenga radicales en el denominador. Este proceso se denomina *racionalización de denominadores.* Para obtener una fracción equivalente se multiplica el numerador y el denominador por la misma expresión.

EJEMPLOS

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\sqrt[3]{3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4-3} = 8-4\sqrt{3}$

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $-5+2-[4\cdot(3-5)+3\cdot(4-7)]=$

b) $-2+3\cdot(-6+5)-2\cdot(7-4)=$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-2+\frac{3}{2}\right)+5\cdot\left(\frac{3}{25}-1\right)=$

2) Plantee y halle el resultado:

a) A la suma de -4 más 10, réstele la diferencia entre 9 y -2.

b) Reste 20 a la suma entre 8, -5 y 12.

c) A la suma entre -13 y -4, reste la diferencia entre -8 y el opuesto de -2

3) Efectúe los cálculos:

a) $|-10+3|+|2-4|-|-5|$

b) $|2|+|-5|-|2-5|$

c) $|10-12|-|-6|+|4-7+2|$

d) $|-2|\cdot|7-3|-|-2\cdot(7-3)|$

4) Si a y b son números reales, puede demostrarse que se cumplen las propiedades:

a) $|a+b|\leq|a|+|b|$

b) $|a-b|\geq|a|-|b|$

c) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

Se pide:

a) Exprese con palabras las propiedades simbolizadas.

b) Muestre que se verifican para: $a=-2$ y $b=5$; $a=-12$ y $b=-10$.

5) Si $A=\left\{\pi,-\sqrt{2},\frac{2}{3},-\frac{4}{5},20,-16\right\}$ diga cuáles elementos son números enteros; enteros negativos, racionales, irracionales.

6) Efectúe las siguientes operaciones, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

a) $(-2)(4-2a+3x)-(-5)(-9+5a-x)$ R: $-53+29a-11x$

b) $10\cdot(-4x+3y)+(-6)(-x-y+2)$ R: $-34x+36y-12$

c) $(2a-b)(-a+2b)$ R: $-2a^2+5ab-2b^2$

d) $(1-a+b)(1+a-b)$ R: $1-a^2-b^2+2ab$

e) $(-5+a)(-5-a)$ R: $25-a^2$

7) Señale la respuesta correcta: $1+(3a-2)^2=$

a) $-3+9a^2$ ( ) b) $5-3a$ ( ) c) $5-12a+9a^2$ ( )

8) Plantee y efectúe las siguientes operaciones:

a) El cuadrado de la suma entre a y b. R: $a^2+2ab+b^2$

b) El cuadrado de la diferencia entre a y b. R: $a^2-2ab+b^2$

c) El cubo de la suma entre a y b. R: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

d) El cubo de la diferencia entre a y b. R: $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

e) El cuadrado de la suma entre a y el cuadrado de b. R: $a^2+2ab^2+b^4=(a+b^2)^2$

f) El cuadrado de la diferencia entre 2 y el cubo de x. R: $4-4x^3+x^6=(2-x^3)^2$

g) El cubo de la diferencia entre el doble de x y el triplo del cuadrado de y. R: $(2x-3y^2)^3=8x^3-36x^2y+54xy^4-27y^6$

9) Efectúe las siguientes operaciones:

$\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$ R: $\frac{9}{5}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$ R: $\frac{5}{6}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$ R. $\frac{1}{6}$

$\frac{42:7+2\cdot(-6)}{4+(-3)\cdot 6-10}$ R: $\frac{1}{4}$

$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 2^3\cdot 2^{-5}$ R: $\frac{1}{8}$

$2x^2y^3\left(-3xy^4\right)$ R: $-6x^3y^7$

$36x^4y^2 : 12x^3y^3$ R: $3xy^{-1}$

$3a^{-1}b^2 : 4a^2b^{-1}$ R: $\frac{3}{4}a^{-3}b^3$

$\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^3 : \left(\frac{4}{5}a^3b^4\right)^2$ R: $\frac{25}{54}b^{-5}$

$2^{1/2}\cdot 2^{-3/2}\cdot 2^0$ R: $\frac{1}{2}$

$1{,}2\widehat{9}+0{,}7\widehat{3}-2{,}\widehat{5}$ R: $-\frac{47}{90}$

$\left(\frac{0{,}125+0{,}45-0{,}075}{0{,}75-0{,}625}\right)^2$ R: 16

10) Las sumas que figuran en los ítems a y b del ejercicio 9 se llaman "sumas telescópicas". Se pide: escriba la suma telescópica de cuatro binomios si 3 es el minuendo del primer binomio y el resultado de la suma es $\frac{20}{3}$. Verifique su respuesta.

11) Exprese como potencia de exponente fraccionario, o como raíz, según corresponda:

a) $\sqrt{b^4}$ R: b^2

b) $(2-x)^{1/2}$ R: $\sqrt{2-x}$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3/5}$ R: $\sqrt[5]{-\frac{27}{64}}$

d) $\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^3}$ R: $\left(a^2-b^2\right)^{3/2}$

e) $\left(\left(1+a^3\right)^2\right)^{3/2}$ R: $\left(1+a^3\right)^3$

f) $x^{3/4}$ R: $\sqrt[4]{x^3}$

12) Efectúe las operaciones:

a) $\sqrt{32}-5\cdot\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\cdot\sqrt{98}$ R: $-20\cdot\sqrt{2}$

b) $5\cdot\sqrt{12}-\sqrt{108}+2\cdot\sqrt{75}-\sqrt{675}$ R: $-\sqrt{3}$

13) Racionalice los denominadores:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2-a}{\sqrt{a}}$ R. $\frac{(2-a)\sqrt{a}}{a}$

c) $\frac{2x}{\sqrt{4x}}$ R. $\sqrt{x}$

d) $\frac{10}{\sqrt{a+b}}$ R: $\frac{10}{a+b}\sqrt{a+b}$

f) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ R: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

g) $\frac{5a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ R: $\frac{5a}{a-b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

h) $\dfrac{4-x^2}{2+\sqrt{x}}$ R: $\dfrac{4-x^2}{4-x}\left(2-\sqrt{x}\right)$

i) $\dfrac{25-x^2}{\sqrt{5}+\sqrt{x}}$ R: $(5+x)(\sqrt{5}-\sqrt{x})$

14) Señale la expresión correcta: $\sqrt{x}-\sqrt{y}=$

i) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ( ) ii) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ( ) iii) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ( )

15) Racionalice el numerador:

$\dfrac{\sqrt{x}-7}{x-21}$ R. $\dfrac{x-49}{(x-21)(\sqrt{x}+7)}$

16) Racionalice el numerador y simplifique, si es posible:

$\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2-2x+1}$ R. $\dfrac{1}{x-1}$

PROBLEMAS

1) Se espera que la población *P* de una ciudad (en miles) crezca de acuerdo a $P=\dfrac{221-3t}{15-\sqrt{3t+4}}$, donde el tiempo *t* está medido en años.

   a) Simplifique la expresión anterior, racionalizando previamente el denominador.

   b) Calcule la población de la ciudad dentro de 4 años.

   c) Calcule el tiempo que debe transcurrir para que la población sea al menos de 25 000 habitantes.

2) Un estudio del medio ambiente de una comunidad, sugiere que el nivel promedio diario de smog en el aire será $Q=\dfrac{0{,}5p+19{,}4}{\sqrt{0{,}5p+19{,}4}}$ unidades cuando la población sea p (en miles).

   a) Racionalice la expresión de Q.

   b) Determine el valor exacto de la expresión anterior cuando la población sea de 9 800 habitantes.

3) La relación longitud-peso de una ballena está dada aproximadamente por $W=0{,}0016L^{2{,}4}$, donde W es el peso en toneladas y L su longitud en pies.

Calcule la razón entre los pesos de dos ballenas, si la longitud de una de ellas es el doble de la otra. (Dé el valor exacto, como radical, y el valor aproximado al entero más cercano)

RESPUESTAS

Problema 1

a) $P=15+\sqrt{3t+4}$ b) *P = 19 000* c) 32 años

Problema 2

a) $\sqrt{0{,}5p+19{,}4}$ b) $\sqrt{24{,}3}$

Problema 3

$4\sqrt[5]{4}$;5

Notación científica

La notación científica es una manera concisa para escribir números muy grandes o muy pequeños. Ejemplos: $5,98\times10^{24}$ kilogramos es la masa aproximada de la tierra; la masa de un protón es $1,67\times10^{-27}$ kilogramos.

Un número está escrito en notación científica si tiene la forma $a\times10^{n}$ donde $1\leq|a|<10$ y *n* es un número entero.

La conversión de la notación científica a la estándar se efectúa de la siguiente manera:

- Si *n* es positivo, se corre la coma decimal *n lugares* hacia la derecha.

- Si *n* es negativo, se corre la coma decimal *n lugares* hacia la izquierda.

EJEMPLOS

$1,15\times10^{4} = 11500$

$7,025\times10^{-3} = 0,007025$

EJERCICIOS

1) Escribir en notación científica:

a) $(3,54\times10^{-2})(5,273\times10^{6})$

b) $\dfrac{(2,16\times10^{4})(1,256\times10^{-12})}{3,17\times10^{-18}}$

c) $8,56 \text{ x } 10^{9}$

d) $2,25 \text{ x } 10^{-2}$

RESPUESTAS

1) a) $1,87\times10^{5}$ b) $8,56 \text{ x}10^{9}$ c) $1,00256\times10^{8}$ d) $2,25 \text{ x}10^{-2}$

2) Escribir en notación estándar:

a) $9,108\times10^{-3}$ b) $5,001\times10^{6}$ c) $2,15645\times10^{4}$ d) $7,26\times10^{-2}$

Uso de la calculadora

Al introducir un número en notación científica, por ejemplo $1{,}125\times10^{6}$, aparece en la pantalla 1125000. Al introducir $1{,}125\times10^{15}$, aparece 1.125 seguido de un espacio y luego 15, o también 1.125E15, dependiendo del modelo de calculadora.

Si el exponente es negativo, como en $1{,}125\times10^{-15}$, aparece 1.125 seguido de un espacio y luego -15, o también 1.125E-15.

EJERCICIOS

1) Calcule cada expresión. Escriba la respuesta en notación científica y redondee el resultado usando tres dígitos significativos.

   a) $(3{,}54\times10^{-2})\,(5{,}273\times10^{6})$ R: $1{,}87\times10^{5}$

   b) $\dfrac{(2{,}16\times10^{4})(1{,}256\times10^{-12})}{3{,}17\times10^{-18}}$ R: $8{,}56\times10^{6}$

2) A partir de una nota publicada en la página web *El Economista,* el PBI de Argentina al finalizar el primer trimestre de 2019 fue de US$ 432.241 millones. Exprese este número en notación científica.

3) Se muestran algunas cifras sobre el uso de redes sociales mundialmente durante 2018, según un informe publicado por la compañía analítica *Cumulus Media*.

   a) Escriba cada uno de los números que se mencionan en notación estándar.

   Se registraron 5,04403 .10^{11} inicios de sesión en Facebook, 1,908 .10^{12} búsquedas en Google y alrededor de 9,69 .10^{13} correos electrónicos enviados.

   b) Calcule y escriba en notación científica el número total de aplicaciones descargadas, de mensajes de Whatsapp enviados, la cantidad anual de fotos visualizadas en Instagram y de videos reproducidos en You Tube durante todo 2018, utilizando los siguientes datos:

   Por minuto en promedio se descargaron 375 mil aplicaciones de Android e iOS, fueron enviados 38 millones de WhatsApp, se vieron 174 mil fotos en Instagram y 4.3 millones de videos en You Tube.

4) Durante el año 2011, Argentina realizó exportaciones a Brasil por un monto aproximado de 17.500 millones de dólares. Exprese este monto utilizando notación científica.

TEMA 2: RAZONES Y PROPORCIONES

1. Razón entre dos números

DEFINICIÓN

Dados dos números a y b distintos de cero, se llama razón al cociente exacto de los mismos.

Se expresa $\frac{a}{b}$.

EJEMPLOS

La razón entre 3 y 6 es $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; entre -6 y 3 es -2; entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{8}$.

2. Proporciones

DEFINICIÓN

Una proporción es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. En la cual a y b son, respectivamente, antecedente y consecuente de la primera razón; c y d, de la segunda. También: a y d son los términos extremos; b y c, los términos medios.

EJEMPLO

$$\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$$

2.1. Propiedad fundamental de las proporciones

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; multipliquemos ambos miembros por $(b \cdot d)$ y obtendremos otra igualdad: $\frac{a}{b}(b \cdot d)=\frac{c}{d}(b \cdot d)$. Simplificando: $a \cdot d = c \cdot b$

PROPIEDAD

En toda proporción, el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

EJERCICIOS

1) Calcule el valor de x en las proporciones:

a) $\frac{x}{5}=\frac{7}{9}$ R: $\frac{35}{9}$

b) $\frac{0{,}2}{x}=\frac{10}{4}$ R: $\frac{2}{25}$

c) $\frac{1-\frac{1}{2}}{1+0{,}5}=\frac{0{,}2\cdot 4}{x}$ R: $\frac{12}{5}=2{,}4$

2) A partir de una proporción, pueden expresarse otras siete proporciones, por ejemplo, permutando los términos extremos: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces: $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$. Deduzca las otras seis.

3) Dada $\frac{15}{8}=\frac{30}{16}$:

a) Pruebe que es una proporción.

b) Encuentre las otras siete que pueden formarse.

4) Puede demostrarse que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. "La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente (o consecuente) como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente (o consecuente)".

También se prueban:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

a) Aplique y verifique las propiedades enunciadas en el ejercicio 4, a partir de $\frac{12}{25}=\frac{36}{75}$.

b) Si a, b y c son números positivos, y $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, entonces se dice que b es el medio proporcional entre a y c; también que b es la media geométrica entre a y c. Se tiene $b^2=ac \Rightarrow b=\sqrt{ac}$.

c) Halle la media geométrica entre: 4 y 9; 60 y 15 ; 7 y 14

Para dos números positivos cualesquiera a y c, la media aritmética es $\frac{a+c}{2}$ y la media geométrica es $\sqrt{ac}$.

Complete la tabla, consignando la media aritmética y la media geométrica de los números dados.

NÚMEROS	$\frac{a+c}{2}$	$\sqrt{ac}$
9 y 16		
12 y 75		
26 y 9		
63 y 28		

3. Serie de razones iguales

DEFINICIÓN

Una serie de razones iguales es la igualdad de dos o más razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots=\frac{m}{n}$$

PROPIEDAD

En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es a su respectivo consecuente. $\frac{a+c+\ldots+m}{b+d+\ldots+n}=\frac{a}{b}$

EJEMPLO

Exprese una serie de razones iguales (de cuatro razones) y compruebe la propiedad.

La definición de triángulos semejantes es: “dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos congruentes y sus lados proporcionales”.

La proporcionalidad de los lados del triángulo se expresa mediante una “serie de razones iguales”.

4. Magnitudes Proporcionales

El peso de un cuerpo, la longitud, el tiempo, el volumen, la superficie, la velocidad, el trabajo, son “magnitudes”. De esas magnitudes, podemos dar “cantidades”. Por ejemplo: de la magnitud tiempo: 4 horas; de la magnitud longitud: 25 centímetros.

DEFINICIÓN

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si a una cantidad de una de ellas corresponde una única de la otra, y si una cantidad de una de ellas se multiplica o divide por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número.

EJEMPLOS

a) La longitud de una cinta y el precio: si $8\ m$ de cinta cuestan $\$\ 24$, entonces 40 =$8\ m \times 5$ costarán $\$\ 120$.

b) La longitud de una circunferencia y la longitud del radio. Sabemos que la longitud de la circunferencia está dada por la fórmula $L = 2\pi\ r$. Si el radio se multiplica por 6 (por ejemplo), la longitud de la circunferencia será $6L$.

c) En la fórmula $2\pi\ r$ “la constante de proporcionalidad” es 2π. Como 2*r* es igual al diámetro de la circunferencia, podemos expresar $L = \pi\ d$, y aquí, π es la constante de proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

DEFINICIÓN

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si a una cantidad de una de ellas corresponde una única de la otra, y si a una cantidad de una de ellas se la multiplica, o divide por un número, la otra queda dividida o multiplicada, respectivamente, por ese mismo número.

EJEMPLO

Si un automóvil lleva una velocidad constante de $40\,\frac{km}{h}$ y tarda 6 horas en recorrer cierta distancia, recorrería esa misma distancia en 3 horas, si la velocidad fuera constante, de $80\,\frac{km}{h}$.

OBSERVACIÓN: $d = v.t$. En el enunciado se considera "constante" a la distancia. Luego, si d es constante, la velocidad es inversamente proporcional al tiempo: $v = \frac{d}{t}$. y el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad: $t = \frac{d}{v}$.

EJERCICIOS

1) Si *y* varía directamente con *x* e *y = 32* cuando *x = 14*, encuentre *y* cuando *x = 49.*

SOLUCIÓN

Por tratarse de magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar:

$$\frac{32}{14}=\frac{y}{49}\Rightarrow y=\frac{32.49}{14}=112$$

2) Supóngase que s varía inversamente con respecto al cuadrado de t y que s =3 cuando t = 9. Encuentre a) la constante de proporcionalidad; b) la fórmula de *s* en función de *t; c*) *s* cuando *t = 15,* d) *t* cuando *s = 12.*

SOLUCIÓN

a) $s=\frac{k}{t^2}$; $3=\frac{k}{9^2}$, $3=\frac{k}{81}$; la constante es *k* = 3.81 = 243 ;

b) $s=\frac{243}{t^2}$

c) $s=\frac{243}{15^2}=\frac{243}{225}$; $s=\frac{81}{25}$;

d) $t^2=\frac{243}{s}$; $t^2=\frac{243}{12}$; $t^2=\frac{81}{4}$; $t=\sqrt{\frac{81}{4}}$; $t=\frac{9}{2}=4,5$

3) Si y es directamente proporcional a x^2, y sabemos que $y=9$ cuando $x=2$, determine y cuando $x=3$.

4) Se sabe que y es inversamente proporcional a x. Cuando $x=3$ es $y=8$. Encuentre y cuando $x=5$.

5) La pupila del ojo humano es casi circular. Si la intensidad de la luz *I* que entra es directamente proporcional al área de la pupila, exprese *I* como función del radio de la pupila. ¿Cómo se ve afectada la pupila cuando se duplica la intensidad de la luz? Ayuda: el área de la pupila A = πr^2; la intensidad de la luz es directamente proporcional al área de la pupila: $I=k\pi r^2$.

DEFINICIÓN

Proporcionalidad conjunta: cuando la cantidad variable Q es proporcional al producto de dos o más cantidades variables puede decirse que Q varía conjuntamente con estas cantidades.

1) Exprese cada enunciado como una ecuación utilizando k como la constante de proporcionalidad.
   a) r es directamente proporcional a m^2 e inversamente proporcional a t.
   b) a es directamente proporcional a b^2 e inversamente proporcional a c^3.
2) La fórmula del área de un triángulo es: $A = \frac{b.h}{2}$, siendo *b* la base y *h* la altura. Exprese con palabras la proporcionalidad que describe la fórmula. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
3) El interés simple generado por un préstamo puede calcularse mediante la fórmula $I = \frac{C.r.t}{100}$ siendo I el interés producido por el capital C colocado al porcentaje r de interés en un periodo de tiempo corto t, generamente mensual o anual. La expresión es válida cuando el período de la tasa de interés coincide con la unidad en que se mide el tiempo.
   a) ¿Existe proporcionalidad directa o inversa entre el interés y algunos de los conceptos implicados en la fórmula?
   b) Obtenga el interés producido por colocar $100.900 al 3% mensual durante 18 meses.
   c) Diga cómo cambia el interés si la tasa de interés simple se triplica.
4) Sabemos que a es directamente proporcional a b^2 e inversamente proporcional a c^3. Si $a = 17{,}8$ cuando $b = 8{,}3$ y $c = 1{,}4$; encuentre a cuando $b = 0{,}9$ y $c = 1{,}3$.
5) El volumen de la esfera varía directamente con respecto del cubo de su radio de acuerdo con la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$. ¿Qué le sucede al volumen cuando se triplica el radio de la esfera?
7) Utilice la ecuación dada para describir con palabras la forma en que la variable del lado izquierdo de la ecuación varía con respecto a las variables del lado derecho. (k es una constante).
   a) $S = 2 \cdot k \cdot r \cdot h$ (superficie del cilindro)
   b) $y = \frac{k \cdot x^3}{z}$

c) $V = k \cdot r^2 \cdot h$ (volumen del cilindro)

d) $M = 0{,}9\, x\, y^2$

e) $C = 2\,\pi$ r (longitud de la circunferencia)

f) $M = 0{,}4 \dfrac{x^2\, y^3}{z}$

g) $V = \pi\, r^2\, h$ (volumen del cilindro)

h) $M = 0{,}2 \dfrac{x\ \ y^3}{z^2}$

4.1. Problemas de regla de tres simple

Los llamados problemas de regla de tres simple, se refieren a magnitudes proporcionales.

EJEMPLOS

1) Un obrero gana $\$\ 300$ por 28 días de trabajo. ¿Cuánto cobraría por 15 días?

28 días.................................. $\$\ 300$

15 días.................................. x

Las magnitudes involucradas son **directamente proporcionales**. Entonces:

entonces $\dfrac{28 \text{ días}}{15 \text{ días}} = \dfrac{\$\ 300}{x}$ $\qquad$ $x = \dfrac{15 \text{ días} \cdot \$\ 300}{28 \text{ días}}$

$$x = \$\ 160{,}70$$

2) En una fábrica, 20 máquinas realizan cierto trabajo en 1400 horas. ¿Cuánto tardarían en efectuar ese mismo trabajo 35 máquinas?

20 máquinas ....1400 horas

35 máquinas x

Las magnitudes involucradas son **inversamente proporcionales**.

entonces

$\dfrac{20 \text{ máq.}}{35 \text{ máq.}} = \dfrac{x}{1400 \text{ h}}$ $\qquad$ $x = \dfrac{20 \text{ máq. } 1400 \text{ h}}{35 \text{ máq.}}$

$x = 800$ horas

PROBLEMAS

1) El cocinero de una rotisería conoce que con 1 kilogramo de harina, 30 gramos de levadura y 10 cm^3 de aceite, pueden hacerse la masa para 4 pizzas. ¿Qué cantidad de dichos ingredientes necesita comprar este negocio que vende 70 pizzas por día?

R: 17,5 kg de harina, 525 gramos de levadura y 175 cm^3 de aceite.

2) Una decoradora desea empapelar una habitación y ha estipulado que alcanzará con 20 rollos de papel de 0,5 metros de ancho. No obstante, al momento de la compra consigue rollos de 0,75 metros del estampado pedido por los inquilinos. ¿Cuántos rollos de empapelado precisará en ese caso?
   R: 14 rollos.

3) Los pintores de una constructora de viviendas saben que con 5 de ellos tardan 15 horas y 25 minutos en pintar un piso completo de un edificio. Si necesitan que uno de los pisos de igual tamaño esté pintado en 6 horas, ¿cuántos de estos trabajadores deberán pintar juntos?
   R: 13 pintores.

4) A un espectáculo teatral asistieron a su primera función 82 personas recaudando $55.760, a la segunda la vieron 106 espectadores y a la tercera, 118. ¿Cuánto recaudó la boletería en total para las tres funciones de esta obra?
   R: $208.080

5) Para envasar una partida de aceite de oliva se utilizaron 200 botellas de 0,75 litros de cadapacidad. ¿De qué capacidad tendrían que ser los recipientes para envasar la misma cantidad de aceite en 300 botellas?
   R: 0,5 litros.

6) En un emprendimiento artesanal 20 tejedores hicieron 450 metros de paño en un cierto plazo de tiempo. ¿Cuántos metros de paño elaborarán en el mismo tiempo 28 tejedores igualmente hábiles?
   R: 630 metros.

7) Dentro de una empresa se cuenta con viandas necesarias para el almuerzo de 28 operarios y 4 supervisores para los próximos diez días. Si hoy ingresaron para una capacitación un grupo de 7 operarios con un supervisor, ¿para cuántos días alcanzarán las viandas con estas incorporaciones?
   R: 8 días.

8) La encargada de Biblioteca de nuestra facultad debió adquirir una docena de libros del mismo título, cuyo precio de catálogo era de $1650 cada uno. Dado que pagó en efectivo, el dueño de la librería le hizo un 7% de descuento sobre el total de la compra, y con ese

dinero restante la encargada adquirió 6 calculadoras. ¿Cuánto pagó por cada libro y por cada calculadora?

R: $1534,50 cada libro y $231 cada calculadora.

9) Marque verdadero o falso según corresponda en cada afirmación.
   a) La capacidad de un vaso y la cantidad de vasos necesarios para llenar una misma jarra son magnitudes directamente proporcionales.
   b) La velocidad es inversamente proporcional al tiempo, para un móvil a una velocidad constante.
   c) Los intereses de una caja de ahorro son directamente proporcionales al dinero depositado.
   d) Los intereses de una caja de ahorro son inversamente proporcionales al tiempo en que está depositado el capital.
   e) El número de operarios es inversamente proporcional al tiempo que emplean en realizar una cierta tarea.
   f) La cantidad de unidades de cierto artículo y el monto a pagar por ellas son magnitudes directamente proporcionales.

4.2. Porcentaje

EJEMPLOS

1) El siguiente es un problema de proporcionalidad directa: Si un comerciante vende a $5220 un televisor de $ 4500 de costo. ¿Cuánto gana por cada $\$\,100$ de esa venta?

SOLUCIÓN

La ganancia por la venta en $ 5220 de un televisor de $ 4500 de costo es la diferencia: $720

$4500 .... $ 720

$\$\,100$ x

entonces $\dfrac{4500}{100}=\dfrac{720}{x}$; $x=\dfrac{720.100}{4500}=16$

$$x=\$\,16$$

Por cada $\$\,100$ de costo, gana $\$\,16$. Decimos que la ganancia es del 16 % del costo.

2) Calcular el 15 % de $\$\,300$.

$\$\,100$ 15%

$\$\,300$ x

entonces

$\frac{\$\,100}{\$\,300}=\frac{\$\,15}{x}$ $\quad x=\$\,45$ $\qquad x=\frac{\$\,300\cdot\$\,15}{\$\,100}$

PROBLEMAS

1) Justifique que el $r\,\%$ de una cantidad x puede hallarse directamente haciendo:

$\frac{r}{100}\ de\ x=\ \frac{r}{100}x=\frac{r\cdot x}{100}.$

a) Halle qué porcentaje es 30 de 120.

b) Halle qué porcentaje es 300 de 150.

R: 25% en a) y 200% en b).

2) Por pago en efectivo de una compra, en un supermercado, se efectúa el 5% de bonificación. Si se hace una compra por un valor de $\$\,125{,}80$, ¿cuánto habría que pagar?

R: $119,51.

3) Se desea vender un producto con un recargo del 40% sobre el costo del mismo. Si dicho costo es de $419, ¿cuál será el precio de venta?

R: $586,60.

4) El día 14 de septiembre del 2018 se depositaron $60.000 a plazo fijo, a 30 días, con el 12% de interés anual.

a) Calcular el interés y el importe a cobrar al final del plazo.

b) Si al vencimiento se agregaron $30.000 al monto resultante y el total se impone nuevamente a 30 días en las mismas condiciones. Calcule el interés y el capital obtenido al finalizar la operación.

R: a) Interés: $592; Importe a cobrar: $ 60.592.

R: b) Interés: $894; Importe a cobrar: $ 91.486.

5) Se aplicó un recargo del 8% por mora en el pago del servicio eléctrico de un comercio, resultando un recargo de $633,53. ¿Cuál es el monto original de la factura sin el recargo?

R: $586,60.

6) El precio de lista de una camisa es de $1200, pero por pago al contado, el local ha bajado su precio a $984. ¿Qué porcentaje de descuento se ha aplicado?

R: 18%.

7) La cooperadora de una escuela decidió hacer una rifa. Cada talonario tiene 200 números, y se han vendido 6 talonarios y medio. Si cada rifa se vendió a $85 y a la cooperadora le queda el 24% de lo recaudado, ¿cuál será la ganancia percibida por la cooperadora?
R: $26.520.

8) Complete la siguiente tabla con los precios y descuentos efectuados para ciertos artículos de juguetería puestos en liquidación por renovación de mercadería.

Precio unitario ($)	% de descuento	Monto del descuento ($)	Precio a pagar ($)
280			182
135		37,80	
	15	306	
1258	12		
	20		450
		3194,88	6789,12

R: 35%, $98; 28%, $97,20; $2040, $1734; $150,96, $1107,04; $562,50, $112,50; $9984, 32%.

9) Mariano compró un televisor de tipo Smart cuyo precio inicial era de $11.829, pero al pagar con tarjeta de crédito en 6 cuotas, se incrementó un 11% el precio. ¿Cuál es el monto de cada una de las cuotas?
R: $2.188,37.

TEMA 3: POLINOMIOS

La expresión algebraica $5x^3+3x^2-2x+1$ es un polinomio en la variable x y coeficientes 5, 3, -2, 1.

Este polinomio tiene cuatro *t*érminos: $5x^3$, $3x^2$, $-2x$, 1. Cada uno de los términos es un *monomio.*

Los números 5, 3, -2, 1 son los coeficientes y los exponentes de la variable son números enteros no negativos. El grado del polinomio es 3 porque es el mayor exponente de la variable.

La expresión $5x^{1/5}+4x^{-2}$ no es un polinomio porque los exponentes de la variable no son números enteros no negativos.

DEFINICIÓN

Se llama polinomio en la variable x y coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ a la siguiente expresión: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$

Grado de un polinomio

Si en el polinomio $P(x)$ es $a_n \neq 0$, el número *n* es el grado de $P(x)$.

Polinomio ordenado

Se dice que un polinomio está ordenado si los términos están escritos de manera que las potencias de la variable figuren ordenadas en forma creciente o decreciente. También se dice que el polinomio está escrito en forma estándar.

Está escrito en forma estándar el siguiente polinomio de grado n en la variable x:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \text{ ; con } a_n \neq 0$$

$$\text{o bien: } a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \text{ ; con } a_n \neq 0$$

a_n es el coeficiente principal. Si el coeficiente principal es el número 1 (uno), se dice que se tiene un polinomio mónico.

Los coeficientes pueden ser números reales o complejos. En este curso operaremos con polinomios de coeficientes reales.

Polinomio completo

Un polinomio se dice completo si en él figuran todas las potencias de la variable, desde x^0 hasta x^n. En caso contrario se dice incompleto.

Completar un polinomio significa escribir, con coeficientes cero, todos los términos que faltan.

Ejemplo: Para completar y ordenar el polinomio $2x^2 - 1 + 3x^5 - 7x$ escribimos:

$$3x^5 + 2x^2 - 7x - 1 = 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 7x - 1$$

Polinomio nulo

Se llama polinomio nulo o idénticamente nulo al que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. El polinomio nulo no tiene grado.

Ejemplo: $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Polinomio constante

Un polinomio de grado cero es un polinomio constante. Ejemplo: $P(x) = -5$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes, es decir, de los términos que tienen las mismas potencias de la variable, son iguales entre sí.

Ejemplo: Son iguales los polinomios $P(x) = 3x + 2x^3 - x^2 - 1$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$

Algunos ejemplos de polinomios de coeficientes reales:

POLINOMIO	GRADO	ORDENADO	COMPLETO
$-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 5x + 1$	4	Sí	No
$-3 + 9x^3 - 7x + 15x^4$	4	No	No
45	0	Sí	Sí
$x^6 + x^4 - 7x^3 + 1$	6	Sí	No
$-4x + 2x^3 - 7x^6$	6	Sí	No
$0x^4 + 3x^3 - x$	3	Sí	No
$0x^2 + 0x + 0$	no tiene		

1. Funciones polinómicas

Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$ tiene coeficientes reales y convenimos en que x representa a cualquier número real, el polinomio define una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el codominio es ese mismo conjunto.

EJEMPLO

Si $P(x)=2x^3-3x+1$, la correspondencia que define esa fórmula, para algunos valores de x, se ilustra en la tabla.

x	$P(x)=2x^3-3x+1$
-1	$-2+3+1=2$
0	1
$1/2$	$-1/4$
1	0
2	11

2. Operaciones con polinomios

Los cálculos con polinomios se basan en las propiedades de las operaciones con números reales porque los coeficientes son reales y la variable representa números reales, según hemos convenido. Llamaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de todos los polinomios de coeficiente reales.

2.1 Adición

Para sumar los polinomios $P(x)=4x^2+7x^4-2x^3+2$ y $Q(x)=3x-5+7x^3$ se los completa y ordena. Luego conviene escribirlos encolumnados a fin de sumar los términos semejantes.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 7x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & + & 0x & + & 2 \\ + & & & 7x^3 & & & + & 3x & - & 5 \\ \hline & 7x^4 & + & 5x^3 & + & 4x^2 & + & 3x & - & 3 \end{array}$$

Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Entonces: $P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

El grado del polinomio suma no supera al grado del polinomio del sumando de mayor grado.

PROPIEDADES

1) La suma de dos polinomios de coeficientes reales $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio perteneciente también a ese conjunto: $(P+Q) \in \mathbb{R}[x]$ (ley de cierre).

2) Asociativa: $(P+Q)+R = P+(Q+R)$

3) Conmutativa: $P + Q = Q + P$

4) Existencia de elemento neutro: existe el polinomio nulo $0 \in \mathbb{R}[x]$, tal que para todo $P \in \mathbb{R}[x]$ es $P+0=0+P=P$.

5) Existencia de elemento opuesto: para todo polinomio $P(x)$ distinto del polinomio nulo existe el polinomio opuesto $(-P(x))$ tal que $P(x)+(-P(x))=0$.

Ejemplo: el opuesto de $3x^2+5x-2$ es $-3x^2-5x+2$.

En efecto: $(3x^2+5x-2)+(-3x^2-5x+2)=0$

2.2. Diferencia o sustracción

Para restar dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$ sumamos a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$.

$P(x)$ es el minuendo y $Q(x)$ es el sustraendo.

$$P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}x^3+5x-\frac{1}{2}x^2+3\right)-\left(2x^2+x^3-5\right)$

Sumamos a *P(x)* el opuesto de *Q(x):*

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & \frac{2}{3}x^3 & - & \frac{1}{2}x^2 & + & 5x & + & 3 \\ + & -x^3 & - & 2x^2 & & & + & 5 \\ \hline & -\frac{1}{3}x^3 & - & \frac{5}{2}x^2 & + & 5x & + & 8 \end{array}$$

2.3. Multiplicación

Para hallar el producto entre dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la propiedad asociativa de la suma. El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base y exponente igual a la suma de los exponentes de los factores: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

$$(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)=a_1b_1x^2+a_1b_0x+a_0b_1x+a_0b_0=a_1b_1x^2+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los factores:

$$gr\left[P(x)\cdot Q(x)\right]=gr\ P(x)+gr\ Q(x)$$

EJEMPLOS

$$4x^2\left(x^3-5x^2-x+6\right)=4x^5-20x^4-4x^3+24x^2$$

$$\left(6x^3-3x+7-x^2\right)\left(x^2-x+1\right)$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
6x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 7 & & & & \\
 & & x^2 & - & x & + & 1 & & & & \\
\hline
6x^5 & - & x^4 & - & 3x^3 & + & 7x^2 & & & & \\
 & - & 6x^4 & + & x^3 & + & 3x^2 & - & 7x & & \\
 & & & & 6x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 7 \\
\hline
6x^5 & - & 7x^4 & + & 4x^3 & + & 9x^2 & - & 10x & + & 7
\end{array}$$

PROPIEDADES

1) El producto de dos polinomios pertenecientes a $\mathbb{R}[x]$ es otro polinomio perteneciente a ese conjunto. (Ley de cierre).
2) Asociativa: $(P\cdot Q)\cdot R=P\cdot(Q\cdot R)$.
3) Conmutativa: $P\cdot Q=Q\cdot P$.
4) Existencia de elemento neutro: existe el polinomio 1 (polinomio identidad) tal que para todo polinomio P se cumple: $P\cdot 1=1\cdot P=P$.
5) Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: $P\cdot(Q+R)=P\cdot Q+P\cdot R$.

2.4. División

Dados dos números enteros, por ejemplo, 25 y 6, existen dos únicos números enteros, 4 y 1, tales que $25 = 6 \cdot 4 + 1$ y $1 < 6$. La operación es la división $\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$

25 es el dividendo, 6 es el divisor, 4 es el cociente y 1 es el resto de la división. El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto, y el resto es menor que el divisor.

En el caso de la división de dos polinomios, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x)$ distinto de cero, existen dos únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, y el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$ o bien $R(x) = 0$.

$P(x)$ es el dividendo; $Q(x)$, el divisor; $C(x)$ el cociente y $R(x)$, el resto de la división.

Para dividir dos polinomios procedemos como en el ejemplo:

$$(2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 33x + 10) : (x^2 - x + 5)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -8x^3 & +9x^2 & -33x & +10 & x^2 - x + 5 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +2x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 - 6x - 7 \\ \cline{1-3}
 & -6x^3 & -x^2 & -33x & & \\
 & 6x^3 & -6x^2 & +30x & & \\ \cline{2-4}
 & & -7x^2 & -3x & +10 & \\
 & & 7x^2 & -7x & +35 & \\ \cline{3-5}
 & & & -10x & +45 &
\end{array}$$

$C(x) = 2x^2 - 6x - 7$; $R(x) = -10x + 45$.

Pruebe que C(x) .Q (x) + R(x) = P(x)

2.5. Regla de Ruffini o división sintética

Para dividir un polinomio *P(x)* por un binomio de la forma $(x - a)$ podemos usar la Regla de Ruffini, también llamada división sintética, que explicaremos mediante un caso particular: la división de un polinomio de cuarto grado por el binomio $(x - a)$.

Se ordena y completa el polinomio dividendo. El cociente será un polinomio de tercer grado y el resto será una constante o bien el número cero:

$$\left(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) : \left(x - a\right) = \left(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right) + R$$

Se disponen los coeficientes del dividendo y el número a como figuran en el esquema.

El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo.

Los siguientes coeficientes y el resto se obtienen, ordenadamente, sumando al coeficiente correspondiente del dividendo, el producto del coeficiente del cociente, obtenido en el paso anterior, por el número a.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a & & & & & \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \boxed{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= a_3 + b_3a \\ b_1 &= a_2 + b_2a \\ b_0 &= a_1 + b_1a \\ R &= a_0 + b_0a \end{aligned}$$

EJEMPLO

1) Divida $\left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right) : \left(x - 1\right)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$C\left(x\right) = 2x^3 + x^2 + 3x$; $R\left(x\right) = 1$.

2) Si el divisor es $\left(x + a\right)$, hacemos $x + a = x - \left(-a\right)$.

EJEMPLO

Divida $\left(4x^3 + 4x^2 + x + 75\right) : \left(x + 3\right)$.

Expresamos: $x + 3 = x - \left(-3\right)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 4 & 1 & 75 \\ -3 & & -12 & 24 & -75 \\ \hline & 4 & -8 & 25 & \boxed{0} \end{array}$$

Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es múltiplo del divisor y también que el dividendo es divisible por el divisor. En el ejemplo, el polinomio dado es divisible por $x+3$ porque el resto es cero.

Podemos escribir $4x^3+4x^2+x+75 : (x+3) = 4x^2-8x+25$.

El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente:

$$4x^3+4x^2+x+75 = (x+3)(4x^2-8x+25)$$

EJERCICIOS

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(3x^3-x^4+5x^2-x+1)+(-6x+7x^4-2x^2+2)+(x^4+x^3-3x^2+2x)$

b) $\left(5x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}x^3+3x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}\right)$

c) $(4x^2-5x+3)(x^2-4x+1)$

d) $(3-x)(5-x+x^2)(2x^2-1)$

e) $(2x-1-2x^2)(6x-9-x^2)$

f) $\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-1\right)$

g) $(0,5x^2-x+1,2)(1,2x-0,9)$

h) $(5x^3+3x^2-x+1):(x^2-x+1)$

i) $(x^4+3x^2-5x+2):(2x-1)$

j) $\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+16x-4\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$

RESPUESTAS

a) $7x^4+4x^3-5x+3$

b) $\frac{29}{5}x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{14}{5}x+\frac{1}{4}$

c) $4x^4-21x^3+27x^2-17x+3$

d) $-2x^5+8x^4-15x^3+26x^2+8x-15$

e) $2x^4-14x^3+31x^2-24x+9$

f) $2x^5-\frac{1}{3}x^4-\frac{5}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2-2x+2$

g) $0,6x^3 - 1,65x^2 + 2,34x - 1,08$

h) $C(x) = 5x + 8$; $R(x) = 2x - 7$

i) $C(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{27}{16}$; $R = \frac{5}{16}$

j) $C(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x + 2$; $R = -10$

EJERCICIOS DE REVISIÓN

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-2x^4 + x^3 - x^2 + 3) + (3x^3 + 2 - 5x^2 - 6x^5) + (-4 + 3x^5 - 2x^4 + 8x^2)$

b) $(6x^6 - 2x^4 + 5x^3 - 7x - 3) - (-3x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 5x - 3)$

c) $\left(2x - 1 - 2x^2\right)\left(6x - 9 - x^2\right)$

2) Halle el polinomio que dividido por $5x^2 - 1$ da el cociente $2x^2 + x - 2$ y el resto $x - 2$.

R: $10x^4 + 5x^3 - 12x^2$

3) Encuentre a, b, c y d si: $a + (a - b)x + (b - c)x^2 + dx^3 = 8 + 12x + 5x^2 - 10x^3$

R: $a = 8$; $b = -4$; $c = -9$; $d = -10$

4) Encuentre a, b, c y d tales que $ax^3 + (a + b)x^2 + (a - c)x + d = 12x^3 - 3x^2 + 3x - 4$

5) Halle el cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini.

a) $\left(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right) : (x - 3)$

b) $\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) : (x + 1)$

c) $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}\right) : (x - 1)$

$d)\left(x^3 - 27\right) : (x - 3)$; $e)\left(x^3 + 27\right) : (x + 3)$

$f)\left(x^4 + 16\right) : (x + 2)$; $g)\left(x^4 - 16\right) : (x - 2)$

$h)\left(x^4 - 16\right) : (x + 2)$; $i)\left(x^4 + 16\right) : (x - 2)$

RESPUESTAS

a) $C(x) = 2x^2 + 9x + 31$; $R = 98$

b) $C(x) = x^4 + x^2 + 1$; R = 0

c) $C(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{7}{12}; R = \frac{47}{60}$

d) $C(x) = x^2 + 3x + 9$; $R = 0$

e) $C(x) = x^2 - 3x + 9$; $R = 0$

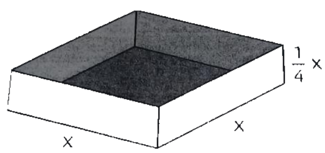
f) $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; $R = 32$

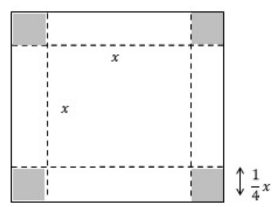
g) $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8; R = 0$

h) $C(x) = x^3$ $-2x^2$ $+4x$ -8; R= 0

i) C(x) = x^3 $+2x^2$ +4x + 8; R= 32

6) Con un trozo cuadrado de cartón se pretende construir una caja sin tapa para envasar un producto artesanal. Las esquinas se cortarán y el cartón se doblará hacia arriba por las líneas marcadas en la figura. Exprese el volumen de la caja como un polinomio de variable x, e indique su grado, el coeficiente principal y el término independiente.





R: $V(x) = \frac{1}{4}x^3$; $gr[V(x)] = 3; a_n = \frac{1}{4}; a_0 = 0.$

2.6. Divisibilidad de polinomios

Si el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ es **cero** se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

En tal caso, $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

En el ejercicio 5.g se ha probado que $x^4 - 16$ es divisible por (x-2) en consecuencia, podemos decir que (x-2) es divisor de $x^4 - 16$ o también que (x-2) *divide* a $x^4 - 16$.

7) Determine si la primera expresión es divisor de la segunda.

a) $x - 2$; $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 24$

b) $x - 5$; $x^3 + 2x^2 - 25x - 50$

c) $x+\dfrac{3}{2}$; $2x^4+5x^3+3x^2+8x+12$

Divisibilidad de una suma o una diferencia de dos potencias de igual grado por la suma o la diferencia de las bases

Los ejercicios 5- ítems d, e, f, g, h, i proponen la división de una suma o de una diferencia de dos potencias de igual grado (de igual exponente) por la suma o por la diferencia de las bases. El resto resultó cero en d, e, g, h.

Generalizando podemos establecer las siguientes conclusiones:

$$x^n+a^n \text{ es divisible por } x+a \text{ si } n \text{ es impar.}$$
$$x^n+a^n \text{ nunca es divisible por } x-a.$$
$$x^n-a^n \text{ es divisible por } x+a \text{ si } n \text{ es par.}$$
$$x^n-a^n \text{ siempre es divisible por } x-a, \text{sea } n \text{ par o impar.}$$

EJERCICIO

Verifique:

$$(x^4-a^4):(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$$
$$(x^4-a^4):(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$$
$$(x^3+a^3):(x+a)=x^2-ax+a^2$$

2.5.1. Valor de un polinomio *P*(*x*) para *x* = *a*

Si en el polinomio $P(x)=2x^2+x-1$ reemplazamos la variable x por un número real a, obtendremos como resultado un número real que llamaremos valor de P(x) para $x=a$.

EJEMPLOS

Si $x=1$, $P(1)=2$

Si $x=-4$, $P(-4)=27$

Si $x=-1$, $P(-1)=0$

DEFINICIÓN

El valor de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es el número que resulta de reemplazar la variable x por el número a.

Si el polinomio tiene coeficientes reales y a es un número real, el valor obtenido será real; si a es un número complejo, el valor obtenido será complejo.

EJERCICIOS

1) Halle el valor de $P(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ para $x = 6$.

Observación: Puede expresarse $P(x)$ en forma anidada para facilitar el cálculo:

$$P(x) = \{[(3x+1)x - 3]x + 1\}x + 2$$

Sustituimos x por 6 y el cálculo se realiza en forma sencilla. Si usamos la calculadora se oprimen las teclas indicadas:

$3 \boxed{\times} 6 \boxed{+} 1 \boxed{=} \boxed{\times} 6 \boxed{-} 3 \boxed{=} \boxed{\times} 6 \boxed{+} 1 \boxed{=} \boxed{\times} 6 \boxed{+} 2 \boxed{=} 4004$

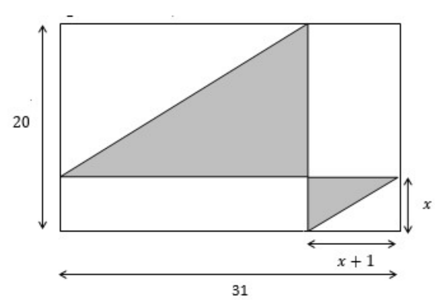
2) Encuentre el valor de $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x + 2$ para $x = -1$; $x = 2$ y $x = -3$.

R: $P(-1) = -1$; $P(2) = 44$; $P(-3) = 59$

3) Exprese el polinomio $P(x) = \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 - x + \frac{2}{3}$ en forma anidada y encuentre su valor

para $x = \frac{2}{3}$.

4) El dueño de una casa quiere rediseñar su jardín y desea colocar césped en ciertas zonas de su fondo. Antes de pasar por la semillería debe determinar la cantidad de dinero que precisará. En la figura se ve un diagrama del patio trasero y, sombreado, el espacio a sembrar, con las dimensiones que allí se detallan en metros.



a) Escriba un poliomio que permita calcular la superficie a sembrar con césped.

b) ¿Cuánto dinero se necesita si x=7 y cuestan $62 la cantidad de semillas necesarias para un metro cuadrado de césped?

R: $S(x) = x^2 - \frac{49}{2}x + 300$; $11.005

2.6. Teorema del resto

Si dividimos un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x-a$, obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R tales que $P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R$. El resto R tendrá grado cero o será el número cero.

Si reemplazamos x por a, es decir, obtendremos el *"valor del polinomio para $x=a$".*

$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+R \qquad P(a)=0+R \qquad$ Luego $P(a)=R$.

Hemos demostrado el teorema del resto o del residuo que puede enunciarse:

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ de grado mayor o igual que uno por un binomio $x-a$ es igual al valor del polinomio para $x=a$.

Otra forma de enunciar este teorema es: El valor de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es igual al resto de la división de $P(x)$ por ($x-a$).

EJEMPLO

El valor de $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ para $x=2$ es igual al resto de la división de *P(x)* por *x – 2.*

En efecto: $P(2)=2^3+5\cdot 2^2-2\cdot 2-24=0$

Calculemos el cociente y el resto usando división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & -2 & -24 \\ 2 & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

El resto es igual a 0(cero) y coincide con el valor hallado: $R=P(2)=0$.

En este ejemplo el resto de la división es cero. Se dice entonces que $P(x)$ es divisible por $(x-2)$ y podemos escribir: $x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x^2+7x+12)$

Hemos expresado el polinomio dado como el producto de dos factores. Uno de ellos, el binomio $(x-2)$, queda perfectamente identificado al comprobar que el polinomio se anula para $x=2$.

2.7. Teorema del factor

A partir del teorema del resto podemos demostrar el "teorema del factor", el cual puede enunciarse de la siguiente forma:

"Un polinomio *P(x)* es divisible por *(x – a)* si y sólo si se anula para *x = a*" y también " *(x – a)* es un factor de *P(x)* si y sólo si *P(a) = 0*."

EJERCICIOS

1) Demuestre que $x-a$ es un factor de $P(x)$ y factorice $P(x)$.

a) $P(x)=x^6+8x^4-6x^3-9x^2$; $x+3$

b) $P(x)=x^3+2x^2-13x+10$; $x+5$

c) $P(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+12$; $x+1$

2) a) Demuestre que $x-b$ es factor de los binomios: x^5-b^5; x^6-b^6; x^7-b^7; x^8-b^8.

b) Encuentre el cociente correspondiente mediante la Regla de Ruffini.

3) Demuestre que $x+a$ es factor de x^5+a^5 y también de x^7+a^7. Exprese estos polinomios como producto.

2.7.1. Ceros de un polinomio

Si $P(x)$ es un polinomio y para $x=a$ es $P(a)=0$; entonces a es un cero de $P(x)$.

El cálculo de los ceros o raíces de un polinomio es de gran utilidad en Matemática.

EJEMPLO

Si $P(x)=x^2+x-2$ y hacemos $x=1$ resulta $P(1)=0$; si $x=-2$, es $P(-2)=0$.

Decimos entonces que 1 y -2 son ceros de $P(x)$.

Por el teorema del resto sabemos que $P(a)$ es igual al resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)$. Luego, si a es un cero del polinomio, $x-a$ es un factor del polinomio.

Si dividimos el polinomio $P(x)=x^2+x-2$ por *(x – 1)* el cociente será *(x + 2)* y el resto será 0 (cero). Podrá expresarse $P(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

EJERCICIOS

1) Analice los polinomios y diga cuál es el grado y cuáles son los ceros.

a) $5\left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(x+7\right)$

b) $-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+9\right)\left(x-1\right)^2$

2) Exprese el polinomio mónico $\left(a_n=1\right)$ de cuarto grado cuyos ceros son –1; 3; -3 y -4.

3) Indique los ceros de los siguientes polinomios sin efectuar cálculos:

a) $x\left(x+4\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)$

b) $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$

c) $3\left(x-\dfrac{5}{4}\right)\left(x+\dfrac{2}{5}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

4) Indique por cuál binomio es divisible:

$A=x^5+1$ $\qquad B=a^5x^5-\dfrac{1}{32}$ $\qquad C=8a^3-x^3$

$D=x^4-81$ $\qquad E=9x^2-4a^4$ $\qquad F=y^8-\dfrac{1}{4}a^4$

RESPUESTAS

1) a) grado 3; ceros: 1, -3, -7 b) grado 4; ceros: $-\dfrac{1}{2},-9,1$, 1 (1 es raíz doble)

2) (x + 1) (x – 3) (x + 3) (x + 4) = $x^4+5x^3-5x^2-45x-36$

3) a) 0, -4, 2, -1 ; b) $\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{2}$; c) $x_1=\dfrac{5}{4},x_2=-\dfrac{2}{5},x_3=\dfrac{1}{2},x_4=\dfrac{1}{2}$ (raíz doble $\dfrac{1}{2}$)

4) A por (x + *1*) ; B por (a x - $\dfrac{1}{2}$) ; C por (*2 a – x*) ; D por (*x – 9)* y (*x + 9*)

E por (3 x + 2 a^2) y (3 x - 2 a^2) ; F por $(y^4-\dfrac{1}{2}a^2)$ y $(y^4+\dfrac{1}{2}a^2)$

3. Cuadrado de un binomio

El cuadrado de $a+b$ es $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

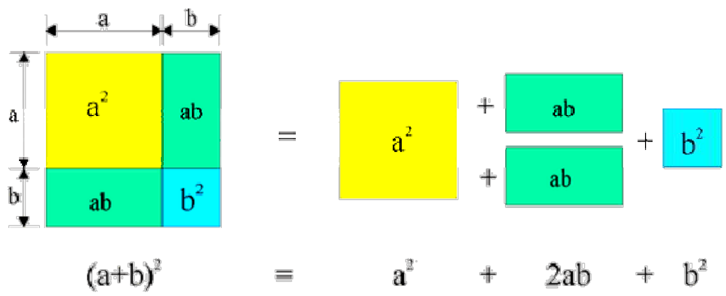
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 .$$

REGLAS

El cuadrado de $a+b$ es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo.

El cuadrado de $a-b$ es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Por resultado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.



Interpretación geométrica del desarrollo de $(a+b)^2$.

EJEMPLOS

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2.3x.5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2y^3\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 2y^3 + 4y^6 = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2y^3 + 4y^6$

c) $(a^3 - x^3)^2 = a^6 - 2a^3x^3 + x^6$

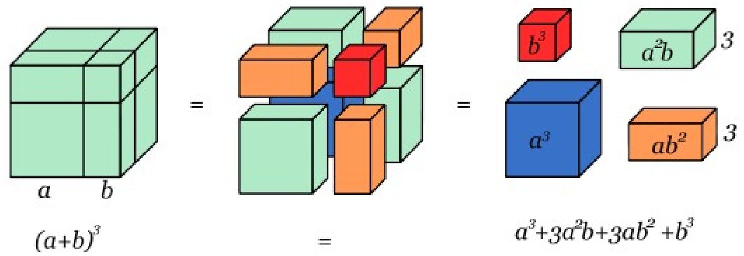
4. Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

REGLA

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término más (o menos) tres veces el producto del cuadrado del primero por el segundo más tres veces el primero por el cuadrado del segundo más (o menos) el cubo del segundo. El resultado es un cuatrinomio cubo perfecto.



Interpretación geométrica del desarrollo de $(a+b)^3$.

EJEMPLOS

a) $(2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2\,y+3.2xy^2+y^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

b) $(3a-1)^3=(3a)^3-3(3a)^2+3.3a-1=27a^3-27a^2+9a-1$

c) $(2x^2+a^3)^3=(2x^2)^3+3(2x^2)^2\,a^3+3.2x^2\,(a^3)^2+(a^3)^3=8x^6+12x^4a^3+6x^2a^6+a^9$

5. Producto de dos binomios conjugados

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

REGLA

El producto $(a+b)(a-b)$ es igual a la diferencia de cuadrados a^2-b^2.

EJEMPLOS

a) $(x+4)(x-4)=x^2-16$

b) $(a^2-x^3)(a^2+x^3)=(a^2)^2-(x^3)^2=a^4-x^6$

EJERCICIOS

1) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{1}{3}x^2-3\right)\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)$

b) $(3a^2x+1)^2$

c) $(x^2-2)^3$

d) $\left(\frac{1}{2}a^2x-\frac{2}{a}\right)^2$

6. Factorización de expresiones algebraicas

Factorizar una expresión algebraica significa transformarla en el producto de dos o más factores.

6.1. Algunos casos de factoreo

6.1.1. Factor común

Dada la expresión algebraica $15x^3y^2 + 6x^2y^3$ se busca el máximo común divisor: $3x^2y^2$. Se divide cada término por ese factor común y se expresa el producto: $15x^3y^2 + 6x^2y^3 = 3x^2y^2(5x + 2y)$.

Para comprobar que la factorización es correcta, se aplica la propiedad distributiva en el segundo miembro.

EJERCICIO

Transforme en producto:

a) $16a^2x^2 - 4x^3a^3$ b) $12a^4 + 9a^3x - 12a^2x^2$ c) $4x(a-2) + 7y(a-2)$

6.1.2. Factorización por agrupamiento

EJEMPLO: $ax - ay - by + bx$

Asociamos los términos que tengan factores comunes: $(ax + bx) + (-ay - by)$.

Se extrae el factor común de cada paréntesis $x(a+b) - y(a+b)$ y finalmente se aplica el caso anterior: $(a+b)(x-y)$

Observación: en este ejemplo también puede agruparse como sigue:

$$ax - ay - by + bx = (ax - ay) + (-by + bx) = a(x-y) + b(x-y) = (x-y) + (a+b)$$

EJERCICIO

Transforme en producto:

a) $xy - 2y + 6 - 3x$ b) $6ab + 2b + 3a + 1$ c) $15x^3 - 9y^3 - 15x^2y^2 + 9xy$

6.1.3. Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza expresándolo como el cuadrado de un binomio.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

EJEMPLOS

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x+3)^2$

b) $9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 2.3.5xy + (5y)^2 = (3x - 2y)^2$

c) $25x^6 - 10x^3 + 1 = (5x^3)^2 - 2.5x^3 + 1^2 = (5x^3 - 1)^2$

d) $\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 4y^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + 2\frac{1}{2}2x^2y + (2y)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2y\right)^2$

6.1.4. Cuatrinomio cubo perfecto

Se factoriza expresándolo como el cubo de un binomio.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \quad ; \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

EJEMPLOS

a) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x+2y)^3$

b) $1 - 9ax + 27a^2x^2 - 27a^3x^3 = (1-3ax)^3$

6.1.5. Diferencia de cuadrados

Se factoriza expresando la diferencia de los cuadrados como el producto de la suma por la diferencia de las bases.

EJEMPLOS

a) $16 - a^2 = (4+a)(4-a)$

b) $\frac{25}{m^2} - 36 = \left(\frac{5}{m} + 6\right)\left(\frac{5}{m} - 6\right)$

c) $\frac{4}{25}a^4 - \frac{1}{9}x^2 = \left(\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{3}x\right)$

d) $x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = (x^2 + a^2)(x+a)(x-a)$

6.1.6. Suma o diferencia de potencias de igual grado

Se factoriza teniendo en cuenta las condiciones de divisibilidad estudiadas.

EJEMPLOS

a) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

b) $x^4 - 16 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$

c) $x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

Observación: cuando el binomio factor es (x + a) los signos del otro factor son alternados, siendo el primero positivo.

Cuando el binomio factor es (x - a) los términos del otro factor son positivos.

EJERCICIOS

1) Encuentre el cuadrado y el cubo de los binomios:

a) $a+b$ b) $a-b$ c) $5+\frac{a}{5}$ d) $\frac{1}{2}+x$ e) $1-5x^2$ f) $a^{-1}-\frac{1}{2}$

2) Calcule:

a) $\left(-1+2x^2\right)^2$ b) $\left(ab^2-\frac{1}{2}a^2b\right)^2$ c) $\left(m-\frac{5}{m}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)^3$

RESPUESTAS

a) $1-4x^2+4x^4$ b) $a^2b^4-a^3b^3+\frac{1}{4}a^4b^2$

c) $m^3-15m+\frac{75}{m}-\frac{125}{m^3}$ d) $\frac{1}{8}+\frac{3}{2}a^2+6a^4+8a^6$

3) Factorice los siguientes polinomios:

a) $6a^2x^2+9abx^2+3acx^2$ b) $2x^3y-3y^2x^2+11x^4-9x^5y^3$

c) $3x(2-x)+4x^2(2-x)$ d) $\frac{1}{6}x^3y^6-\frac{2}{9}x^3y^5+\frac{1}{4}x^2y^{12}$

e) $2mx^2+3px^2-4m-6p$ f) $2ax+2bx-ay+5a-by+5b$

g) $4+4a+a^2$ h) $1-2a+a^2$

i) $a^4+2a^2x^3+x^6$ j) $x^2+36-12x$

k) $\dfrac{x^2}{4}+a^2x+a^4$

l) $\dfrac{x^3}{27}-\dfrac{ax^2}{3}+a^2x-a^3$

m) $y^3+\dfrac{3}{4}y^2+\dfrac{3}{16}y+\dfrac{1}{64}$

n) $9x^2-1$

o) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$

p) y^6-36x^4

q) $a-x^2$

r) $81-x^4$

s) $\dfrac{1}{9}x^2y^2+\dfrac{1}{3}x^2yz+\dfrac{1}{4}x^2z^2$

t) $16\left(x-2a\right)^2-4\left(x-2a\right)^3$

RESPUESTAS

a) $3ax^2\left(2a+3b+c\right)$

b) $x^2\left(2xy-3y^2+11x^2-9x^3y^2\right)$

c) $\left(2-x\right)x\left(3+4x\right)$

d) $\dfrac{1}{3}x^2y^5\left(\dfrac{1}{2}xy-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{4}y^7\right)$

e) $\left(2m+3p\right)\left(x^2-2\right)$

f) $\left(a+b\right)\left(2x+5-y\right)$

g) $\left(2+a\right)^2$

h) $\left(1-a\right)^2$

i) $\left(a^2+x^3\right)^2$

j) $\left(x-6\right)^2$

k) $\left(\dfrac{x}{2}+a^2\right)^2$

l) $\left(\dfrac{x}{3}-a\right)^3$

m) $\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^3$

n) $\left(3x+1\right)\left(3x-1\right)$

o) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{a}\right)$

p) $\left(y^3+6x^2\right)\left(y^3-6x^2\right)$

q) $\left(\sqrt{a}+x\right)\left(\sqrt{a}-x\right)$

r) $\left(3+x\right)\left(3-x\right)\left(9+x^2\right)$

s) $x^2\left(\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{2}z\right)^2$

t) $4\left(x-2a\right)^2\left(4-x+2a\right)$

4) Encuentre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios

a) $P=ax^2-ab^2;\ Q=x^2-2bx+b^2;\ S=\left(x^3-b^3\right)$

b) $P=ax-3a-b^2x+3b^2;\ Q=a^2x^2-9a^2-b^4x^2+9b^4$

RESPUESTAS

a) $x-b$ $\qquad a(x-b)^2(x+b)(x^2+bx+b^2)$

b) $(x-3)(a-b^2);(a-b^2)(x-3)$ $\qquad (a-b^2)(x-3)(x+3)(a+b^2)$

5) La forma totalmente factorizada de $9x^3-xy^2+9x^2y-y^3$ es:

a) $(9x^2+y^2)(x+y)$ ☐

b) $(3x+y)^2(x+y)$ ☐

c) $(3x-y)^2(x+y)$ ☐

d) $(3x+y)(3x-y)(x+y)$ ☐

e) ninguna de las anteriores ☐

6) ¿Cuál es la forma totalmente factorizada de la expresión $x^2(x-2)-4x(x-2)+4(x-2)$?

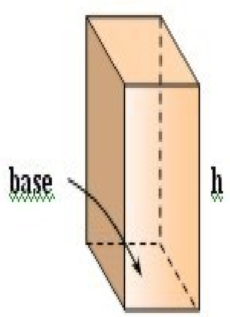
a) $(x-2)(x+2)^2$ ☐

b) $(x-2)(x^2-2x+4)$ ☐

c) $(x+2)(x-2)^2$ ☐

d) $(x-2)^3$ ☐

e) ninguna de las anteriores ☐



7) Una caja tiene las siguientes dimensiones: largo $=x$, ancho $=x-3$ y alto $=x+5$. Exprese el volumen en función de x.

R: $V(x)=x^3+2x^2-15x$

8) Halle el perímetro y la superficie de un cantero circular que tiene $12{,}30\ m$ de diámetro. (la longitud de una circunferencia = $2\pi r$; la superficie de un círculo = πr^2)

9) Un laboratorio desea lanzar al mercado un nuevo producto y necesita diseñar el packaging. Para ello ha pensado en dos opciones: un prisma y un cubo. El ancho de ambos deberá ser el mismo pero el prisma tendrá el triple de profundidad y 4 cm menos de altura. Encuentre las medidas y el volumen de cada caja.

SOLUCIÓN

Llamemos *x* a la arista del cubo. El volumen del cubo es igual al área de la base multiplicada por la altura: Volumen del cubo = (área base) x (altura)

Volumen del cubo = *(x.x) . x* = x^3

La base del prisma será un rectángulo, uno de los lados tendrá *x* cm; el otro lado tendrá *3.x* cm (la profundidad) y la altura será de *(x – 4) cm.*

Volumen del prisma = (área base) . altura; V = $(x.3x)(x-4)$

Volumen del prisma= $x.3x.(x-4)= 3x^3 - 12x^2$

Igualando los volúmenes: $3x^3 - 12x^2 = x^3$

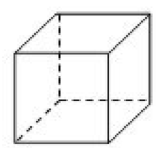
$3x^3 - 12x^2 - x^3 = 0$; $2x^3 - 12x^2 = 0$

Para resolver la ecuación podemos factorizar el primer miembro: $2x^2(x-6)=0$

Las soluciones son $x_1=0$ y $x_2=6$.

La primera solución no conviene al problema, entonces la única solución es $x = 6$

El nuevo packaging podrá ser un cubo de 6 *cm* de arista o un prisma de base rectangular de dimensiones:

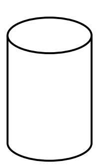


ancho= 6 *cm,; profundidad = 3 . 6 cm= 18 cm y altura= 6 cm – 4 cm = 2 cm.*

VERIFICACIÓN

V cubo= $(6\,cm)^3 = 216\,cm^3$; V prisma = (6 cm)(18 cm)(2cm) = 216 cm^3.

10) Para guardar azufre en polvo se ha pensado en un tubo cilíndrico y se deberá elegir entre dos recipientes que poseen esta característica y tienen la misma capacidad. El cilindro A tiene una altura igual a su radio y el cilindro B posee un radio igual al doble del radio de A y una altura 6 cm menor. Halle las dimensiones de los cilindros y el volumen.



Volumen cilindro = (área base). altura = $\pi.r^2.h$

SOLUCIÓN

Si la altura del cilindro A es igual al radio y el radio del cilindro B es el doble del radio de A y su altura es 6 cm menor podemos expresar:

Volumen A = $\pi \,.\, r^2.r = \pi.\, r^3$

Volumen B = $\pi.(2r)^2.(r\ -6) = \pi\ [4r^2.(r - 6)] = 4\pi r^2 (r-6)$

Como los volúmenes son iguales: $\pi r^3 = 4\pi r^2 (r-6)$

Dividimos ambos miembros por πr^2 y se obtiene una ecuación de primer grado:

$r = 4(r-6)$; $r = 4r - 24$;

$4\ r - 24 - r = 0$; $3\ r - 24 = 0$; $3\ r = 24$; $r = \frac{24}{3} = 8$

El radio del cilindro A es de 8 cm y la altura es también de 8 cm.

El radio del cilindro B = 2r = 2 . 8 cm = 16 cm

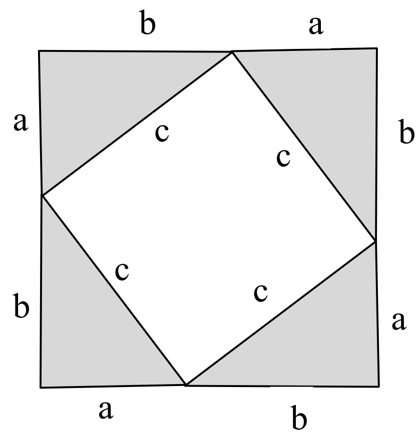
La altura del cilindro B = r – 6cm = 8 cm – 6 cm = 2 cm

Volumen A = $\pi.r^3 = 3{,}14.\ (8cm)^3 = 1607{,}68\ cm^3$

Volumen cilindro B = $\pi.(4r^3 - 24r^2) = 3{,}14\ .[4.(8\ cm)^3\ - 24.(8\ cm)^2 = 1607{,}68\ cm^3$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Si los catetos de un triángulo son *a* y *b* y la hipotenu el teorema de Pitágoras demuestra que $c^2 = a^2 + b^2$

Una demostración del teorema

Construimos un cuadrado de lados $(a+b)$. Su área es: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1) y trazamos los segmentos necesarios para que queden determinados cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. El área de cada triángulo es A = $\frac{ab}{2}$.

El cuadrilátero interior es un cuadrado de lado *c* y área $A_1 = c^2$.

El área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado de lado *c*.

$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$; Reemplazamos el primer miembro por el segundo miembro de (1):

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$; despejamos $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

$c^2 = a^2 + b^2$; Luego la hipotenusa es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

EJERCICIOS

1) Las longitudes de los lados de un triángulo son 15 cm, 24 cm y 30 cm. ¿Es un triángulo rectángulo?

2) Una plaza es un cuadrado de 14400 metros cuadrados. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?

TEMA 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

DEFINICIÓN

Si $P(x)$ y Q (x) son dos polinomios, y $Q(x)$ es distinto de cero, la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se llama expresión racional fraccionaria.

EJEMPLO

$\frac{3x-5}{4x-1}$ es una expresión racional fraccionaria, válida (o que tiene sentido) para todo x que sea un número real, excepto para $x=\frac{1}{4}$, porque en este caso el denominador se anula.

1. Cero o raíz de una expresión racional fraccionaria

DEFINICIÓN

Un número real "α" es cero o raíz de una expresión racional fraccionaria, si esa expresión tiene sentido para $x=\alpha$, y se anula para $x=\alpha$.

Esto significa que al reemplazar la variable x por el número α el denominador debe ser distinto de cero y el numerador debe anularse.

EJEMPLOS

a) $x=\frac{5}{3}$ es cero de $\frac{3x-5}{4x-1}$ porque la expresión tiene sentido para $x=\frac{5}{3}$ pues

$4\,\frac{5}{3}-1=\frac{17}{3}\neq 0$ y se anula para $x=\frac{5}{3}$:
$$\frac{3\,\frac{5}{3}-5}{4\,\frac{5}{3}-1}=\frac{5-5}{\frac{17}{3}}=0$$

b) La fracción $\frac{4x^2-4}{x^2+x}$ puede escribirse $\frac{4(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$. Esta expresión es equivalente a la dada.

El denominador se anula para $x=0$ y para $x=-1$. En consecuencia la expresión tiene sentido para todo número real, excepto para $x=0$ y $x=-1$. Observamos que el factor $(x+1)$ figura en el numerador y en el denominador. Podemos simplificar la expresión dividiendo ambos por dicho factor y tendremos: $\dfrac{4x^2-4}{x^2+x}=\dfrac{4(x-1)}{x}$ con $x\neq -1$ y $x\neq 0$. La división efectuada es válida para $x\neq -1$. El único cero o raíz de la expresión fraccionaria es $x=1$

EJERCICIOS

1) Indique para qué valores de la variable son válidas las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{2}{x+2}$ b) $\dfrac{x+2}{x+\frac{1}{2}}$ c) $\dfrac{3x-7}{x^2-1}$ d) $\dfrac{-5}{4x}$ e) $\dfrac{-2x}{x^2-25}$

RESPUESTAS

a) Para todo x tal que $x\neq -2$
b) Para todo x tal que $x\neq -\frac{1}{2}$
c) Para todo x tal que $x\neq 1$ y $x\neq -1$
d) Para todo x tal que $x\neq 0$
e) Para todo x tal que $x\neq 5$ y $x\neq -5$.

2) Factorice y simplifique las siguientes expresiones, indicando las condiciones que deben cumplirse para que la simplificación sea válida:

a) $\dfrac{5x^2-5}{x+1}$ b) $\dfrac{a^2x-a^2b}{ax^2-ab^2}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ d) $\dfrac{x^2-36}{x^3-216}$

e) $\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ f) $\dfrac{\left(4x^2-9a^2\right)\left(18x-12\right)}{\left(2x-3a\right)\left(12x-8\right)}$

g) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{a^2-2ab+b^2}$ h) $\dfrac{x^3-8}{2x^2-8x+8}$

RESPUESTAS

a) $5\left(x-1\right)$, si $x\neq -1$ b) $\dfrac{a}{x+b}$, si $x\neq b$ y $x\neq -b$

c) $\dfrac{x+1}{x}$, si $x\neq 1$ y $x\neq 0$ d) $\dfrac{x+6}{x^2+6x+36}$, si $x\neq 6$

e) si $x \neq 4$

f) $\frac{3}{2}(2x+3a)$, si $x \neq \frac{3}{2}a$, $x \neq \frac{2}{3}$

g) $\frac{x+y}{a-b}$, $a \neq b$

h) $\frac{x^2+2x+4}{2(x-2)}$, si $x \neq 2$

3) Señale la respuesta correcta y justifique:

i) $\frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2} = \frac{x-2a}{x+2a}$

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$

b) Si $x \neq 2a$

c) Si $x \neq -2a$

d) Si $x \neq 2a$ o $x \neq -2a$

e) Si $x \neq 2a$ y $x \neq -2a$

ii) $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+2x+4$

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$

b) Si $x \neq -2$

c) Si $x \neq 8$

d) Si $x \neq 2$

e) Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$

4) Operando sólo con el primer miembro verifique:

a) $\frac{x^4-3x^2+5x-3}{x-1} = x^3+x^2-2x+3$; si $x \neq 1$

b) $\frac{3x^5+10x^4+4x^3+x^2-x+15}{x+3} = 3x^4+x^3+x^2-2x+5$; si $x \neq -3$

c) $\frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1$; si $x \neq -1$

2. Operaciones con expresiones racionales fraccionarias

Las reglas son las mismas que para las operaciones con números racionales.

2.1 Adición y sustracción.

Si los denominadores son iguales el resultado se obtiene sumando (o restando) los numeradores y se conserva el denominador común.

EJEMPLOS

a) $\frac{3x+5}{2x-2}+\frac{5x-6}{2x-2}=\frac{3x+5+5x-6}{2x-2}=\frac{8x-1}{2x-2}$; $x\neq 1$

b) $\frac{4-6x}{x-3}+\frac{5+x}{3-x}$ En este ejemplo se puede multiplicar por *(-1)* el numerador y el denominador del segundo sumando para obtener una expresión equivalente con denominadores iguales:

$$\frac{4-6x}{x-3}+\frac{5+x}{3-x}=\frac{4-6x}{x-3}+\frac{-1(5+x)}{-1(3-x)}$$

$$=\frac{4-6x}{x-3}+\frac{-5-x}{x-3}$$

$$=\frac{4-6x-5-x}{x-3}$$

$$=\frac{-7x-1}{x-3}$$, y también = $-\frac{7x+1}{x-3}$; $x\neq 3$

Si los denominadores no son iguales, se reducen a mínimo común denominador, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, como en el caso de la suma de fracciones:

EJEMPLO

$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$ Buscamos el mínimo común denominador que es el mínimo múltiplo común de los denominadores. $x^2-4=(x+2)(x-2)$ y procedemos como en una suma de fracciones numéricas.

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)+(x-6)}{(x-2)(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2 \; y \; x\neq 2$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2-(x^2-2x+x-2)+x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2-x^2+x+2+x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3}{(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 2$$

2.2. Multiplicación

Se factorizan los numeradores y los denominadores de las expresiones fraccionarias y si es posible se simplifica.

EJEMPLOS

a) $$\frac{x-1}{x+2}.\frac{x^2-4}{x^2-x} = \frac{x-1}{x+2}.\frac{(x-2).(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 0; x\neq 1$$

b) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}.\frac{x-2}{x^2-3x} = \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)}.\frac{x-2}{x(x-3)} = \frac{x-3}{x(x+2)} \quad ; \quad x\neq -2; x\neq 0; x\neq 2; x\neq 3$$

2.3. División

Se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLOS

a) $$\frac{x-1}{x+5}:\frac{x^2-x}{x^2-25} = \frac{x-1}{x+5}.\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x-5}{x} \quad ; \; x\neq -5; x\neq 0; x\neq 1; x\neq 5$$

b) $$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}\right):\frac{x^2-4x+4}{x-1} = \frac{2(x-1)-x}{(x+1)(x-1)}.\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x-2-x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x-2)}, x \neq \pm 1 \; y x = 2$$

EJERCICIOS

1) Sume y, si es posible, simplifique el resultado:

a) $\frac{x}{8}+\frac{5x}{8}-\frac{2x}{5}$ R: $\frac{7}{20}x$

b) $\frac{2x}{3a}-\frac{5x}{2a}+\frac{3x}{4a}+x$ R: $\frac{-13x+12ax}{12a}$

c) $x+\frac{1}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x}$ R: $\frac{x^2+x+2}{1-x^2}$

d) $\frac{1}{8-8x}-\frac{1}{8+8x}+\frac{x}{4+4x^2}$ R: $\frac{x}{2\left(1-x^4\right)}$

e) $\frac{x-2a}{x+2a}-\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{8ax}{x^2-4a^2}$ R: $\frac{2x+4a}{x-2a}$

f) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b+a}$ R: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

g) $\frac{4x-3b}{2x}-2+\frac{2x+b}{3x}$ R: $\frac{4x-7b}{6x}$

2) Verifique: $\frac{a-2}{2a+2}-\frac{3a-4}{3a+3}+\frac{4a-1}{6a+6}= \frac{1}{6}$

3) Diga si el resultado de $\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a+b}+\frac{a^2(b-a)}{b(a-b)(a+b)}$ es alguna de las siguientes fracciones:

$\frac{a+b}{b}$ $\frac{-b}{a+b}$ $\frac{b}{a+b}$

4) Multiplique:

$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)\frac{x^4}{x^4+1}$ R: $\left(x^6-1\right)x$

$\frac{10x-20}{x^2}\frac{3x^2}{5}\frac{20}{x^2-4x+4}$ R: $\frac{120}{x-2}$

$\frac{x^2-1}{3}\frac{6a}{x+1}\frac{x^2-2x+1}{10a}$ R: $\frac{\left(x-1\right)^3}{5}$

$\frac{ab}{a^2+b^2+2ab}\frac{2a+2b}{a+b}$ R: $\frac{2ab}{\left(a+b\right)^2}$

$\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)$ R: 3

$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)$ R: $\frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{ax}{a+2x}\right)$ R: $\frac{a-2x}{ax}$

5) Divida:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ R: $x^2-\frac{1}{x}$

b) $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)$ R: $\frac{x^2-a^2}{ax}$

c) $\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)$ R: $\frac{x}{x-2}$

d) $\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right):\left(\frac{x^2}{x^3-a^2x}\right)$ R: 2

6) Señale con una cruz la respuesta correcta:

$$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}\right):\frac{x^2-4x+4}{x-1}=$$

a) $\dfrac{-1}{x^2-x-2}$ ( )

b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ( )

c) $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ ( )

d) ninguna de las anteriores ( )

TEMA 5: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son ecuaciones de primer grado las que pueden expresarse en la forma $ax+b=0$ con $a \neq 0$.

Para hallar la única solución o raíz hacemos: $ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$.

EJEMPLOS

a) $3x-5=0$

SOLUCIÓN

Despejamos x: $3x=-5$. Luego $x=-\frac{5}{3}$.

Verificación: $3.\left(-\frac{5}{3}\right)+5=-5+5=0$.

b) $6x=9$

SOLUCIÓN

$x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ (Verifique)

Observaciones: si se tiene la ecuación $3x-3=2(x-1)+x$, para resolver hacemos:

$$3x-3=2x-2+x$$

$$3x-2x-x=-2+3$$

$$0x=1$$

Esto es un absurdo, pues para cualquier número x, es $0x=0$. Se dice, entonces, que **la ecuación no tiene solución**.

c) Dada: $3(2x-1)-x+4=5x+1$, hacemos:

$$6x-3-x+4=5x+1$$

$$6x-x-5x=1+3-4$$

$$0x=0$$

Esta igualdad se verifica para todo valor de x. Se dice que la dada es una identidad.

Uso de ecuaciones para resolver problemas

Las ecuaciones lineales pueden utilizarse para resolver problemas. En la siguiente lista se muestra una estrategia para la resolución de situaciones problemáticas.

1	**Analizar el problema**. Leyéndolo con cuidado para comprender los hechos que presenta. ¿Qué información se da? ¿Qué vocabulario se presenta? ¿Qué se pide determinar? Con frecuencia, un diagrama ayuda a visualizar los hechos del problema.
2	**Formular una ecuación**. Eligiendo una variable que represente la cantidad que se ha calcular. A continuación, expresar todas las demás cantidades que se mencionen en forma de expresiones donde intervenga la variable. Finalmente, formular una ecuación que exprese una cantidad en dos formas distintas.
3	**Resolver la ecuación**.
4	**Verificar** la ecuación con el resultado hallado para la incógnita.
5	**Enunciar la respuesta** del problema.
6	**Comprobar el resultado con la redacción del problema**. ¿Es coherente con el contexto? ¿Puede haber más de una solución posible?

EJERCICIOS

1) Sin resolver la ecuación, determine cuáles de los números que se dan son soluciones de la ecuación correspondiente.

los números $\frac{12}{5}; \frac{4}{5}; 7$ de $3x-4=-2x+8$ R: $\frac{12}{5}$

los números $\frac{1}{3}; 3; 5$ de $4\left(-x+5\right)-3x+1=0$ R: 3

los números $0; 3; \frac{1}{5}$ de $-5\left(x+8\right)+2=-38-3x-2x$ R: todos

los números $0; -1; 3$ de $13x-2\left(5x+2\right)=2\left(x+2\right)+x$ R: ninguno

2) Resuelva y verifique:

a) $-3(x+5)-4x=7x+4$

b) $-3x+9-7x=4(-x+8-3x)$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{3}=\frac{x}{3}-\frac{-2x+9}{4}$

d) $4(x-2)+\frac{1}{2}=\frac{-1}{3}(x+2)-\frac{14}{3}$

e) $\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{5}{x^2-9}$

f) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$

RESPUESTAS:

a) $x=-\frac{19}{14}$

b) $x=\frac{23}{6}$

c) No tiene solución

d) $x=\frac{1}{2}$

e) $x=-\frac{2}{9}$

f) $x=2$

3) Resuelva los siguientes problemas. Plantee, para hacerlo, una ecuación de primer grado en una variable. Verifique.

a) La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuáles son esos números?
R: 25, 27, 29

b) Encuentre cuatro números consecutivos, tales que el primero más el cuádruplo del tercero, menos el doble del cuarto, sea igual a 95.
R: 31, 32, 33, 34

c) Si a un número se lo multiplica por 1/5 y se le suma 3/4, se obtiene el mismo resultado que si a ese número se le resta 9/20. ¿Cuál es el número?
R: 3/2

d) Un alumno compró tres libros. El primero le costó $ 175, el segundo $89. Si en total pagó $ 476, ¿cuál es el costo del tercer libro?
R: $ 212

e) Encuentre el número por el cual se debe dividir 282 para que el cociente sea 13 y el resto 9.
R: 21

f) Claudia compró un pantalón de jean y una remera gastanto un total de $2691,50. El precio del jean era dos veces y media el de la remera, ¿cuánto pagó por cada prenda?
R: $769 la remera y $1922.50 el pantalón de jean.

g) Un artículo cuyo valor actual es de $ 322, tuvo dos aumentos de precio. El primero del 12% y el segundo del 15%. Encuentre el valor original.
R: $250

h) Se reparten $ 22.500 entre tres personas. La segunda recibe el doble de la primera y la tercera un cuarto de lo que reciben las otras dos juntas. ¿Cuánto recibe cada una?
R: $ 6.000, $ 12.000 y $ 4.500 respectivamente

i) Se tienen dos calidades de leche: la entera y la descremada. La leche entera tiene 700 calorías por litro y la descremada 320 calorías por litro. ¿Qué cantidad de cada leche se debe mezclar para obtener un litro de leche semidescremada con 400 calorías por litro?

R: 0,79 litros de leche descremada y 0,21 litros de leche entera

j) Se tiene cierta cantidad de dinero. Con ella se compró una silla, gastando el 20% del mismo, luego se compró un tablero, gastando 1/5 del dinero que quedó. Al final quedan $ 512. ¿De cuánto dinero se disponía al principio?

R: $ 800

k) En un negocio de productos autóctonos venden alfajores. Al abrir se tenían el doble de alfajores de chocolate que de fruta y los alfajores de dulce de leche eran el triple que los de chocolate y fruta juntos. Si en total había 144 alfajores, ¿cuántos correspondían a cada sabor?

R: 12 de fruta, 24 de chocolate y 108 de dulce de leche.

l) Marcelo tiene el doble de la edad de Matías y Pablo tiene el triple de la edad de Marcelo. La suma de las edades de los tres es de 108 años. Determine la edad de cada uno.

R: Matías 12 años, Marcelo 24 años y Pablo 72 años.

m) Por dos insumos informáticos se pagó $ 2050. El primer insumo costó $ 1.450 más que el segundo. ¿Cuánto costó cada insumo?

R: Primer insumo: $ 1750; segundo insumo: $ 300

n) Un obrero gasta la mitad de su salario en comida para su familia y y las tres quintas del resto en impuestos de su casa. Si aún le quedan $5600, ¿cuál es el monto de su sueldo?

R: $28.000.

o) Recordando la fórmula vista para el interés simple en el capítulo 2: $I = \frac{C.r.t}{100}$ (siendo I el interés producido por el capital C colocado al porcentaje r de interés en un periodo de tiempo corto t, generamente mensual o anual), ¿qué capital es necesario depositar para obtener un interés de $21.000, en un año y medio, al 7% anual?

R: $200.000

p) Un capital de $150.000 produjo un interés de $18.000 en dos años. ¿Cuál fue a tasa a la que fue depositado?

R: 6% anual.

q) Por efectos de la devaluación, el precio unitario de una herramienta aumentó un 20%, y luego de un mes en un 10% más. Si el precio final es de $594, ¿cuál era el precio inicial?

R: $450.

r) Un depósito de agua está lleno el lunes. El martes se vacía 1/3, el miércoles se gasta 1/5 de lo que quedaba y el jueves, 300 litro. Si aún queda 1/3 del total, ¿cuál es la capacidad del depósito?

R: 1500 litros

s) Un ahorrista dispone de $15.000 para invertir en un año, una parte al 8% y el resto al 7% de interés. Si desea ganar $1110 con esa inversión, ¿cuánto debe invertir en cada tasa?

R: $6000 al 8% y $9000 al 7%.

t) Un comerciante adquirió banderines para alentar a dos equipos que se enfrentan en el transcurso de un torneo deportivo que se realizará en dos jornadas. El primer día vendió tres cuartas partes de lo que tenía. El segundo día vendió ocho décimos de los que le quedaban y le sobraron 35 banderines. ¿Cuántos tenía inicialmente?

R: 700 unidades.

u) Tres productores vecinos, Julia, Pablo y Daniela, se asocian para comprar un galpón que destinarán a la cría de pollos parrilleros. Julia contribuyó con una cantidad igual a ¼ del valor total. Pablo pagó 5000 dólares más que Julia, y Daniela 5000 dólares más que Pablo. ¿Cuánto pagaron en total por el galpón?

R: US$60.000.

TEMA 6: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la forma

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$$

Resolver el sistema consiste en encontrar los valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones. Dichos valores son las soluciones del sistema de ecuaciones.

Explicaremos mediante ejemplos algunos de los procedimientos usados para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Método de sustitución

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 3y = -14 \end{cases}$$

Despejamos *x* en la segunda ecuación: $x = 3y - 14$ *(1)*

Reemplazamos *x* en la primera ecuación:

$2(3y - 14) - y = -3$

$6y - 28 - y = -3$

$5y = 25$

$y = 5$

Sustituimos este valor en *(1)*

$x = 3.5 - 14$; $x = 1$

La solución es $x = 1$; $y = 5$

Verificación: Para verificar se reemplazan los valores obtenidos en las dos ecuaciones, operando independientemente en cada miembro de la respectiva ecuación.

$2x - y = 2.1 - 5 = -3$

$x - 3y = 1 - 3.5 = -14$

2. Método de reducción o de eliminación por sumas o restas

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 3y = -14 \end{cases}$$

Para eliminar *x* multiplicamos la segunda ecuación por *–2* y sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x + 6y = 28 \end{cases}$$

5y = 25 Luego *y = 5*

Reemplazamos el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema original para encontrar *x*:

x – 3.5 = -14 ; x = -14 + 15 ; x = 1

La solución es: *x = 1; y = 5.* Resuelto el sistema, conviene siempre efectuar la verificación.

Sistemas consistentes e inconsistentes

Apliquemos el método de eliminación por sumas o restas para resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 10x - 6y = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por (-2)

$$\begin{cases} -10x + 6y = 4 \\ 10x - 6y = 4 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro y tenemos: 0 = 8

Este absurdo significa que el sistema no tiene solución. Decimos que es inconsistente o incompatible.

Sistemas determinados e indeterminados

Resolvemos el sistema por el método de eliminación:

$$\begin{cases} -x + 3y = -\frac{1}{4} \\ 2x - 6y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 6y = -\frac{1}{2} \\ 2x - 6y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{; sumamos: } \begin{cases} -2x + 6y = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Concluimos que las dos ecuaciones son equivalentes. El sistema es consistente e indeterminado: tiene infinitas soluciones que se encuentran dando un valor arbitrario a una de las variables y hallando el correspondiente de la otra.

$$-2x + 6y = -\frac{1}{2} \; ; \quad 6y = 2x - \frac{1}{2} \; ; \quad y = \frac{1}{6}\left(2x - \frac{1}{2}\right) \; ; \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}$$

El conjunto de todas las soluciones se expresa: $S = \left\{x, y = \frac{1}{3}x \quad 12, con\ x \subset \mathbb{R}\right\}$ en este caso,

se dan valores reales a *x* y se obtienen los correspondientes de *y.*

Cuando la solución consiste en un único valor para cada una de las incógnitas, como ocurrió en el caso del primer sistema resuelto, se dice consistente determinado.

EJERCICIOS

1) Resuelva por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x-5y-1=0 \\ x+3y+4=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+\ y=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -3x+\dfrac{9}{4}y=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x+y=1 \\ -5x+8y=7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y=-\dfrac{1}{2} \\ -5x+8y=8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{9} \\ -\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Ayuda para la resolución del ejercicio f:

Pueden efectuarse las sustituciones: $\dfrac{1}{x}=t$; $\dfrac{1}{y}=u$, obteniéndose el sistema

$$\begin{cases} t+2u=\dfrac{5}{9} \\ -4t+6u=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Se encuentra: $t=\dfrac{1}{3}$; $u=\dfrac{1}{9}$ y la solución es *x = 3 ; y = 9*

RESPUESTAS

a) $x=-1$; $y=-1$

b) $x=4$; $y=1$

c) $x=\dfrac{1}{2}$; $y=4$

d) $x=-3$; $y=-1$

e) $x=-4$; $y=-\dfrac{3}{2}$

f) $x=3$; $y=9$

2) Resuelva los sistemas usando el método de reducción por sumas o restas.

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 10x-6y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ 4x+3y-4=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y=-8 \\ 9x-5y=-25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x-5y-1=0 \\ x+3y+4=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ 3x+6y=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1 \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=-4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x-y=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{2}y-1=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 0,2x+0,3y=0,75 \\ -0,4x-4y=-3,2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{5}{3} \\ 2x-4y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$

RESPUESTAS

a) $x=1;\ y=4$

b) Sistema inconsistente

c) $x=-\dfrac{1}{2};\ y=-\dfrac{7}{2}$

d) $x=1;\ y=0$

e) $x=-\dfrac{25}{2};\ y=-14$

f) $x=-1;\ y=-1$

g) Sistema inconsistente

h) $x=-\dfrac{1}{2};\ y=-\dfrac{1}{3}$

3) Señale la respuesta correcta: *x = -2*, *y = 3* es la solución del sistema:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x+y=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ -x-2y=-8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+4y=14 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=-5 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$

e) de ninguno de las anteriores

4) La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ -3x+10y+7=0 \end{cases}$ es:

a *x* = $\frac{1}{2}$ *; y = 4*

b) *x* = - 4 *; y* = $\frac{1}{2}$

c) *x* = 6 *; y* = $\frac{1}{2}$

d) *x* = 4 *; y* = $\frac{1}{2}$

e) ninguna de las anteriores

5) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y sólo si tienen la misma solución.

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

e) de ninguno de las anteriores

Resolución de problemas a través de sistemas de ecuaciones

A continuación, podrá plantear los problemas siguientes mediante sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resuelva y verifique las soluciones.

EJEMPLO

Encuentre la fracción tal que sumando 9 al numerador y 2 denominador se obtiene 3, y multiplicando por 10 al numerador y por 4 al denominador se obtiene 6.

SOLUCIÓN

La fracción que se busca será $\frac{x}{y}$, tal que $\begin{cases} \frac{x+9}{y+2} = 3 \\ \frac{10x}{4y} = 6 \end{cases}$

Operando convenientemente se obtiene el sistema equivalente:

$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 10x - 24y = 0 \end{cases}$ La solución del sistema es: x =12; y = 5. La fracción que se busca es:

$\frac{12}{5}$ (Efectúe la resolución del sistema y verifique la respuesta)

PROBLEMAS

a) Encuentre dos números tales que su suma sea -56 y su diferencia 106.

R: 25 y (-81)

b) Dos números son tales que su suma es 140, el cociente y el resto de la división entre los mismos son, respectivamente, 1 y 38. ¿Cuáles son esos números?

R: 89 y 51

c) Gabriel juntó $610 en billetes de $20 y de $50. En total tiene 20 billetes, ¿cuántos tiene de cada denominación?

R: 13 de $20 y 7 de $50.

d) Una madre tiene 24 años más que su hijo y además su edad es el cuádruple que la de éste. ¿Qué edad tiene cada uno?

R: 32 años la madre y 8 años su hijo.

e) Encuentre dos números tales que su suma sea 106 y su diferencia 56.

R: 81 y 25

f) Encuentre los valores que deben tomar b y c en la ecuación $3x + by = c$, para que se verifique simultáneamente para $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = 2$; y para $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{6}{5}$.

R: b = -5 ; c = -9

g) En un teatro cobran \$500 la entrada de los adultos y \$ 340 la de los niños. Un día abonaron su entrada 107 espectadores y se recaudaron \$49.500. ¿Cuántas entradas vendieron para adultos y para niños?

R: 82 para adultos y 25 para niños.

h) En una alcancía hay 25 monedas de \$10 y \$5; si en total hay \$190, ¿cuántas moneda de cada clase hay en la alcancía?

R: 13 monedas de \$10 y 12 de \$5.

i) Se compraron dos productos de diferente costo por un total de \$ 510. El costo del mayor menos cuatro veces el costo del menor es de \$ 10. ¿ Cuál es el costo de cada producto?

R: mayor: \$ 410 ; menor: \$ 100.

j) Un empresario compró tres autos y dos camionetas en 79.000 dólares. Luego realizó una segunda compra de cinco autos y una camioneta, de los mismos modelos que los anteriores en 78.000 dólares. ¿Cuánto pagó por cada auto y por cada camioneta?

R: auto: 11.000 dólares; camioneta: 23.000 dólares

k) En el comedor de la Facultad hay 25 mesas y 120 sillas. Hay mesas con 6 sillas y otras con 4 sillas. ¿Cuántas mesas de cada tipo hay?

R: 10 mesas con 6 sillas y 15 con 4 sillas.

l) En un garage hay motos y autos. Las motos con dos ruedas y los autos con cuatro. En total hay 80 vehículos y 274 ruedas. ¿Cuántas motos y autos hay en el garage?

R: motos: 23 ; autos: 57.

m) Lorena y Nicolás se van de viaje; sus equipajes suman 55 kg, pero el de ella es 15 kg mas liviano que el de él. Romina y Julián también salen de viaje; la valija de ella es 12 kg más liviana que la de él, y además la valija de Romina pesa la mitad que la de Julián más tres kilos.

   i. Indique cuál de estos sistemas representa cada situación planteada.

$$\begin{cases} x+15=y \\ 55=x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=55 \\ x=y-15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y-12 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y-12 \\ x=\frac{1}{2}y+3 \end{cases}$$

   ii. Encuentre el peso de cada valija.

   R: 20 kg la de Lorena, 35 kg la de Nicolás, 18 kg la de Romina y 30 kg la de Julián.

n) A unas jornadas de Contabilidad y Economía organizadas en nuestra Facultad acudieron 60 profesionales de Paraná y Santa Fe. Si se fueran 3 paranaenses y vinieran 3 santafesinos, la cantidad de santafesinos sería un tercio de la de los paranaenses. ¿Cuántos asistentes de cada ciudad hay en el congreso?

   R: 48 paranaenses y 12 santafesinos.

o) Un comerciante vendió equipos de soldaduras a $ 2.700 c/u y sierras a $ 1.800 c/u. En total vendió 85 equipos, recibiendo $ 207.000. ¿Cuántas soldaduras y sierras vendió?

   R: soldaduras: 60 ; sierras: 25 .

p) Eugenia y Carla planean sus vacaciones. Entre las dos tienen ahorrados $35.000. Sin embargo, no aportaron la mitad cada una, sino que Carla guardó la cuarta parte de lo que guardó Eugenia. ¿Cuánto ha ahorrado cada una? ¿Cuánto debe ahorrar Carla para que sus ahorros igualen a los de su amiga?

   R: $28.000 y $7.000.

q) En un comercio de ropa, un cliente adquirió 2 remeras y 3 camisas por $4450, y otro cliente compró 3 remeras y 2 camisas de la misma marca y modelo por $4300, ¿cuáles son los precios que pagaron por cada remera y cada camisa?

   R: $800 cada remera y $950 cada camisa.

r) Una verdulería colocó la siguiente promoción en su pizarra: “HOY SE LIQUIDAN CÍTRICOS: 6 kg de mandarina valen lo mismo que 5 kg de naranja y 5 kg de naranja más 2 kg de mandarina cuestan $200”. ¿A cuánto se vendía el kilo de cada fruta?

   R: $25 el kg de mandarina y $30 el kg de naranja.

s) Una parte de \$80.000 fue invertida en el Banco Nación que ofrece un 10% de interés anual y el resto en el Banco Francés el cual otorga el 12%. Si los ingresos anuales por estas inversiones fueron de \$9000, ¿cómo fue distribuida la inversión?

R: \$30.000 en Banco Nación y \$50.000 en Banco Francés.

t) Dos turistas en Rusia pagaron por el mismo artículo 81 euros y 90 dólares, respectivamente. Luego, cambiaron un billete de 100 euros y otro de 100 dólares, a la misma cotización anterior, y recibieron en total \$9500. ¿Cuál fue la cotización de cada divisa?

R: \$50 el euro y \$45 el dólar.

u) Dos modistas armaron 200 camperas. Una de ellas cose 3 en una hora y la otra 2. Sabiendo que la segunda trabajó 10 horas más que la primera, calcule la cantidad de camperas que confeccionó cada una y el tiempo trabajado por cada modista.

R: 108 camperas la modista 1 y 92 la modista 2, trabajando 36 y 46 horas respectivamente.

TEMA 7: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

1. Definición

Si a un polinomio de segundo grado lo igualamos a cero obtenemos una ecuación de segundo grado. Los ceros o raíces del polinomio son las raíces de la ecuación.

EJEMPLO

Si $P(x) = x^2 + 4x + 3$, los ceros son -3 y -1. Si escribimos $x^2 + 4x + 3 = 0$ tenemos una ecuación de segundo grado y sus raíces son -3 y -1.

Las ecuaciones de segundo grado en una variable son las que pueden expresarse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Un polinomio de grado n tiene n ceros. Una ecuación polinómica de grado n tiene n raíces; si el grado de la ecuación es dos, tendrá dos raíces que podrán ser iguales o diferentes.

Polinomio de segundo grado: $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0;$

Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$

2. Cálculo de las raíces de ecuaciones incompletas

2.1. Ecuación incompleta de la forma $ax^2 = 0$. $a \neq 0$

Como $a \neq 0$, debe ser $x^2 = 0$. Luego $x_1 = x_2 = 0$.

Ejemplo: $-12x^2 = 0$ La solución es: $x_1 = x_2 = 0$.

2.2. Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$. $a \neq 0$

Hacemos $ax^2 = -c \; ; x^2 = -\frac{c}{a} \; ; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ejemplo: $4x^2 - 9 = 0$:

Despejamos x: $x^2 = \frac{9}{4}$; $x = \frac{\pm\sqrt{9}}{2}$. ; $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

2.3. Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Factorizamos: $x\left(ax+b\right)=0$.

Si un producto es cero, al menos uno de los factores debe ser cero. Una de las soluciones es $x_1 = 0$; la otra se encuentra anulando el segundo factor: $ax+b=0$, despejamos x y tenemos $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo: $5x^2 + x = 0$; extraemos el factor común: $x\left(5x+1\right)=0$

Una solución es $x_1 = 0$ y la otra: $5x+1=0 \Rightarrow 5x=-1$, entonces $x_2 = -\dfrac{1}{5}$

3. Cálculo de las raíces de ecuaciones completas de segundo grado

3.1. Ecuación completa: $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b y c son distintos de cero).

Dada una ecuación, se obtienen ecuaciones equivalentes efectuando las siguientes operaciones:

a) Multiplicando ambos miembros por un número distinto de cero.

b) Sumando un mismo número en ambos miembros.

c) Sumando y restando un mismo número en uno de los miembros.

Las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones. Para deducir la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado usaremos los recursos que hemos formulado.

Hacemos: $ax^2 + bx = -c$ y multiplicamos ambos miembros por $1/a$, $\left(a \neq 0\right)$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumamos a ambos miembros $\dfrac{b^2}{4a^2}$ a fin de obtener en el primer miembro un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = -\dfrac{c}{a} + \dfrac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{-4ac + b^2}{4a^2}$

Extraemos raíz cuadrada: $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Despejamos x: $\quad x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las raíces son: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

4. Discriminante de la ecuación

La expresión b^2-4ac es el discriminante de la ecuación.

Si el discriminante es igual a cero, la ecuación tiene dos raíces reales e iguales o coincidentes:

$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

Si el discriminante es mayor que cero, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, y si es menor que cero, la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

EJEMPLO

Resuelva la ecuación y verifique su respuesta: $2x^2-3x+1=0$

SOLUCIÓN

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$; $x=\dfrac{3\pm1}{4}$; $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=1$.

Las raíces son números reales.

ACTIVIDAD

Demuestre que las raíces de una ecuación completa reducida de la forma $x^2+bx+c=0$ (donde a = 1) pueden obtenerse mediante la fórmula $x=\dfrac{-b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{b^2}{4}-c}$.

Ayuda: puede hacer a = 1 y usar la fórmula deducida anteriormente para resolver $ax^2+bx+c=0$)

EJEMPLOS

a) Resuelva $x^2-4x+1=0$

SOLUCIÓN

$x=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$ Reemplazando: $x=2\pm\sqrt{4-1}$; $x=2\pm\sqrt{3}$

Las raíces son números irracionales: $x_1=2-\sqrt{3}$; $x_2=2+\sqrt{3}$

b) Resuelva: $y^2+6y+11=0$

SOLUCIÓN

$$y=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c} \;;\; y=-3\pm\sqrt{9-11} \;;\; y=-3\pm\sqrt{-2}$$

$$y_1=-3-i\sqrt{2} \;;\; y_2=-3+i\sqrt{2}$$

Las raíces son números complejos conjugados.

5. Ecuaciones fraccionarias que pueden resolverse mediante la fórmula cuadrática

EJEMPLO

Se trata de resolver la ecuación $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=\frac{7x+3}{x^2-1}$, con $x\neq-1; x\neq1$

Podemos reducir a común denominador:

$$\frac{(3x+2)(x+1)+2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+3}{(x+1)(x-1)}$$

"Eliminamos" los denominadores multiplicando ambos miembros por el denominador común:

Efectuando las operaciones en el numerador del primer miembro, se tiene:

$$5x^2+3x+2=7x+3$$
$$5x^2-4x-1=0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene: $x_1=-\frac{1}{5}; x_2=1$ esta última no es raíz de la ecuación dada.

¿Por qué?

Observación: Este método de resolución de ecuaciones fraccionarias puede conducir a la obtención de raíces que no satisfacen la ecuación original, llamadas raíces extrañas, debido a que se multiplican ambos miembros por una expresión variable, en el ejemplo por (x - 1) (x + 1).

Siempre que se multiplique la ecuación por una expresión variable, es necesario verificar las soluciones en la ecuación original para desechar las posibles raíces extrañas.

Verificación: Para, $x=-\frac{1}{5}$ en el primer miembro se llega a $-\frac{5}{3}$ y en el segundo también a $-\frac{5}{3}$.

El valor hallado es raíz de la ecuación original.

Si verificamos en la ecuación original haciendo *x = 1,* en el primer miembro se llega a $\frac{5}{0}+1$ y en el segundo a $\frac{10}{0}$. Esas expresiones carecen de sentido: la división por cero no está definida.

Por simple inspección en la ecuación original se advierte que *x = 1* no es solución, y puede desecharse sin efectuar cálculos.

EJERCICIOS

1) Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique sus soluciones:

a) $5x^2-45=0$ b) $100x^2+20=0$ c) $5x^2-5=0$

d) $x^2+81x=0$ e) $-x^2+9x=5x$ f) $-3+12x^2=0$

g) $x^2+4x+1=0$ h) $2x+3=-4x^2$ i) $10x^2-13x-3=0$

j) $-6x^2+1-x=0$ k) $\frac{3}{x-2}=x$ l) $\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{x+1}{x-2}$

m) $\frac{x}{x-1}+\frac{4}{x+1}=2$ n) $\frac{1}{x-2}=1+\frac{2}{x^2-2x}$ ñ) $\frac{2x-3}{3x-2}=\frac{x-1}{2x}$

o) $\frac{2+x}{2-x}+\frac{2-x}{2+x}=2$

RESPUESTAS

a) $x_1=-3, x_2=3$

b) $x_1=-\frac{\sqrt{5}}{5}i,\ x_2=\frac{\sqrt{5}}{5}i$

c) $x_1=-1, x_2=1$

d) $x_1=0, x_2=-81$

e) $x_1=0, x_2=4$

f) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}$

g) $x_1=-2-\sqrt{3}; x_2=-2+\sqrt{3}$

h) $x_1=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{11}}{4},\ x_2=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{11}}{4}$

i) $x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{-1}{5}$

j) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

k) $3, -1$

l) 5 (2 no es solución porque se anula el denominador)

m) $\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}$

n) 1 (2 no es raíz ¿por qué?)

ñ) $2; -1$

o) $x_1=x_2=0$

2) Resuelva:

a) $x^2-4x+1=0$

b) $x^2-4x+13=0$

c) $x^2-4x-1=0$

d) $x^2-2x+2=0$

e) $x^2-8x+14=0$

f) $\frac{3}{x+5}=1-\frac{4}{x-5}$

RESPUESTAS

a) $2\pm\sqrt{3}$

b) $2\pm 3i$

c) $2\pm\sqrt{5}$

d) $1\pm i$

e) $4\pm\sqrt{2}$

f) $-3; 10$

6. Factorización de una ecuación de segundo grado

Si las raíces de $ax^2+bx+c=0$ son x_1 y x_2, justifique que esa ecuación puede expresarse como un producto de tres factores: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Asimismo, si son x_1 y x_2 los ceros de un polinomio ax^2+bx+c ese polinomio (o trinomio) puede expresarse: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2-x-10=0$ tiene raíces $x_1=-\frac{5}{3}$ y $x_2=2$

Se factoriza: $3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2)$ *(verifique)*

EJERCICIOS

1) Factorice i) $2x^2+5x-12=0$ ii) $x^2-5x+4=0$

2) Exprese como producto el trinomio $P(x)=x^2-6x+5$

RESPUESTAS

a) i) $2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)=0$ ii) $(x-1)(x-4)=0$

b) $P(x)=(x-1)(x-5)$

7. Relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y sus raíces

Si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2+bx+c=0$, entonces se verifica:

i) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; ii) $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Enuncie, con palabras, las expresiones i) y ii) y demuestre las propiedades enunciadas.

EJEMPLOS

1) Forme la ecuación de segundo grado cuyas raíces son 2 y (–5).

SOLUCIÓN

$$x_1+x_2=2+(-5)=-3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=2(-5)=-10=\frac{c}{a}$$

luego $b=3a$; $c=-10a$ La ecuación es: $ax^2+3ax-10a=0$, $a\left(x^2+3x-10\right)=0$

Como a debe ser distinto de cero, debe ser $x^2+3x-10=0$

VERIFICACIÓN

Para x = 2: $2^2+3\cdot 2-10=4+6-10=0$

Para x = -5: $(-5)^2 + 3(-5) + 10 = 0$

Otra forma de verificar es resolviendo la ecuación obtenida.

OBSERVACIÓN

Si $a = 1$, se tiene $x^2 + bx + c = 0$ y en tal caso resulta: $x_1 + x_2 = -b$; $x_1 x_2 = c$

2) Escriba la ecuación de segundo grado que tiene por raíces -1 y 7, y el coeficiente $a = 8$.

SOLUCIÓN

La forma más sencilla de resolver este problema consiste en expresar la ecuación como un producto, para lo cual se tienen los datos necesarios:

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$; $8(x+1)(x-7)=0$

Efectuando las operaciones se obtiene la ecuación en la forma $8x^2 - 48x - 56 = 0$

Otro procedimiento consiste en aplicar las propiedades de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -1 + 7 = 6 = -\frac{b}{a} \text{ ; } 6 = -\frac{b}{8} \text{ ;} -b = 48$$

$$x_1 x_2 = (-1) \cdot 7 = -7 = \frac{c}{a} \text{ ; } -7 = \frac{c}{8} \text{ ; } c = -56$$ Luego $b = -48$ y $c = -56$

La ecuación es: $8x^2 - 48x - 56 = 0$

Observación: en el primer miembro de la ecuación obtenida se tiene el factor común 8. Factorizamos y obtenemos $8(x^2 - 6x - 7) = 0$, igualdad que se cumple para x tal que $x^2 - 6x - 7 = 0$ resolviendo esta ecuación se obtienen las raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 7$.

Conclusión: para operar en forma más simple, cuando hay un factor común en la ecuación conviene dividir por dicho factor y las raíces que se obtengan serán también las raíces de la ecuación dada.

EJERCICIOS

Resuelva los siguientes problemas. Plantee la solución correspondiente aplicando ecuaciones cuadráticas y verifique sus resultados.

1) Forme las ecuaciones de segundo grado que cumplan las condiciones que se indican:

a) $a=-3$ y las raíces son -6 y 0.

b) Los coeficientes b y c son números enteros; las raíces son $-3/4$ y $-5/3$.

c) Las raíces son los inversos de las raíces de $12x^2 - x - 1 = 0$.

d) $a=5$, una raíz es 0 y la otra es $1/2$.

2) Determine c en la ecuación $x^2 - 10x + c = 0$ de modo que una de sus raíces sea:

a) -1

b) b) 0

c) $5-2\sqrt{2}$

SOLUCIÓN DE A)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1\,x_2 = c \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + x_2 = 10 \\ -x_2 = c \end{cases} \quad , \quad x_2 = 11 \quad , \quad c = -11$$

$$\textit{la ecuación es } x^2 - 10x - 11 = 0 \qquad (\textit{verifique})$$

R: 2-c) c = 17, la ecuación: $x^2 - 10x + 17 = 0$

3) Determine b en la ecuación $2x^2 + bc + 5 = 0$ de modo que una de sus raíces sea:

a) $-\frac{5}{2}$

b) -1

c) $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

R: a) b = 7, la ecuación es $2x^2 + 7x + 5 = 0$; b) b = 7.

SOLUCIÓN DE C)

Si un número complejo es raíz, el complejo conjugado también lo es. Además: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$, $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$x_1 + x_2 = -3 \quad luego \ \frac{-b}{2} = -3 \Rightarrow b = 6$

La ecuación es $2x^2 + 6x + 5 = 0$

4) Halle el valor (o los valores) que debe tomar k en la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$, de modo que: a) las dos raíces sean iguales; b) las raíces sean complejas; c) las raíces sean reales. R: a) k = 9, b) k > 9, c) k < 9

5) La suma de n números enteros positivos, a partir del número 1 (uno) puede encontrarse mediante la fórmula $S = \frac{n(n+1)}{2}$. Encuentre cuántos números enteros positivos deben sumarse a partir del 1 para que la suma sea 6670.

   R: 115 números.

6) El producto de dos números pares consecutivos es 624. Encuéntrelos. R: 24 y 26

7) Determine el número que sumado a su inverso dé por resultado 82/9.

   R: 1/9

8) Encuentre, si existe, el número tal que si se lo multiplica por 8 da el mismo número que se obtiene si a su cuadrado se le resta 65.

   R: 13 y -5

9) Un empresario ha comprado un gran local rectangular sobre una avenida principal de la ciudad por un monto de US$168.000. Sabiendo que el frente del local tiene una longitud igual a las tres cuartas partes del fondo del local, y que el precio del metro cuadrado es de 140 dólares, ¿cuáles son las dimensiones del inmueble adquirido?

   R: 40 m x 30 m

10) Se construye un establo rectangular aprovechando una pared construida de un granero. La superficie del establo es de 200 m^2 y para rodear los otros tres lados se emplearon 40 metros de cerca. Determine analíticamnete las dimensiones del establo. R: 10 x 20 m

8. Ecuaciones con radicales que pueden resolverse mediante ecuaciones cuadráticas

a) Sea la ecuación $2\sqrt{x+6} = x+3$. Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$4\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow 4(x+6) = x^2+6x+9$$

$$4x+24 = x^2+6x+9 \Rightarrow x^2+6x+9-4x+6=0$$

La ecuación es: $x^2+2x-15=0$

Se resuelve y se obtienen las raíces $x_1 = 3$; $x_2 = -5$.

Es necesario comprobar si las soluciones de la ecuación cuadrática son soluciones de la ecuación original. Esa verificación debe realizarse porque al elevar los dos miembros de una ecuación a la misma potencia, se obtiene una ecuación que admite, al menos, todas las raíces de la primera, pero pueden aparecer raíces que no son soluciones de la ecuación original.

Para verificar se reemplaza en cada uno de los miembros y se comparan los resultados, tal como se explica a continuación:

Para $x_1 = 3$:

Primer miembro: $2\sqrt{3+6} = 2\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$

Segundo miembro: $3+3=6$

Se verifica la igualdad.

Para $x_2 = -5$:

Primer miembro: $2\sqrt{-5+6} = 2\sqrt{1} = 2\cdot 1 = 2$

Segundo miembro: $-5+3=-2$

No se verifica la igualdad. Luego la única solución es $x=3$.

b) Dada: $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x+2}+1$, se eleva al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \Rightarrow 3x+3 = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}\cdot 1 + 1^2$$

$$3x+3 = x+2+2\sqrt{x+2}+1 \Rightarrow 3x+3-x-3 = 2\sqrt{x+2}$$

$2x = 2\sqrt{x+2}$ Se dividen ambos miembros por 2:

$x = \sqrt{x+2}$

Se eleva al cuadrado: $x^2 = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = x+2$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado, obteniéndose: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

Se verifica si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación original:

Para $x_1 = 2$: $\sqrt{3.2+3} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{2+2} + 1 = \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3$ Luego *2* es solución.

Para $x_2 = -1$: $\sqrt{3.(-1)+3} = \sqrt{-3+3} = \sqrt{0} = 0$

$\sqrt{-1+2} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 1 + 1 = 2$

Como los resultados no son iguales, (-1) no es solución de la ecuación dada.

EJERCICIOS

1) Resuelva las ecuaciones:

a) $3 + \sqrt{5-x} = x$

b) $x - 1 = \sqrt{x+5}$

c) $\sqrt{4x-3} = 3\sqrt{4-x}$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$

e) $x + 3 = \sqrt{3x+7}$

f) $\sqrt{2x} + \sqrt{3-x} = 3$

RESPUESTAS

a) 4

b) –1 y 4 (pero -1 no es solución)

c) 3

d) 6

e) –2 y -1

f) 2

BIBLIOGRAFÍA

- Angel, A. (2004). *Algebra intermedia.* México: Pearson- Educación
- Berio, A.; Colombo, M.; D'Albano, C.; Sardella, O. y Zapico, I. (2001). *Matemática 1 Activa*. Madrid, España: Puerto de Palos.
- Berman, A. *et al*. (2010). *Matemática IV: Nueva edición*. Buenos Aires, Argentina: Santillana Prácticas.
- Calter, P. (1980). *Teoría y problemas de fundamentos de Matemática I. Serie de compendios Schaum*. Bogotá, Colombia: Mc Graw-Hill.
- De Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1991). *Matemáticas - Bachillerato 2*. Madrid, España: Anaya.
- Fleming, W y Varberg, D. (1993). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Prentice Hall.
- Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Prentice Hall.
- Gustafson, R. (1997). *Álgebra intermedia. Ciudad de* México, México: International Thomson Editores.
- Hoffmann, L.; Bradley, G. y Rosen, K. (2006). *Cálculo Aplicado Para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Bogotá, Colombia: Mc Graw-Hill.
- Laurito, L.; De Stisin, L.; Trama, E., Ziger, D. y Sidelsky, E. (2001). *Matemática 9*. Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos.
- Marcipar Katz, S. et al. (1998). *Matemática elemental: Múltiples opciones de práctica*. Santa Fe, Argentina: Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral.
- Sobel, M. y Lerner, N. (1996). *Álgebra.* Ciudad de México, México: Prentice Hall.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable – Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning Editores.
- Stewart, James y otros (2007) "Introducción al Cálculo", Ed. Thomson Learning, Buenos Aires.
- Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría.* Ciudad de México, México: Pearson-Educación.
- Tajani, M. y Vallejo, M. (1980). *Aritmética – Álgebra 1: Enfoque moderno. Escuelas industriales.* Buenos Aires, Argentina: Cesarini Hnos. Editores.

- Zapico, I.; Micelli, M.; Tajeyan, S.; Vera Ocampo, J. (2008). *Matemática.* Buenos Aires, Argentina: Santillana Perspectivas.
- Zill, D. y Dejar, J. (1994). *Álgebra y Trigonometría.* México: Mc Graw-Hill.